1. $y'' - y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $y(0) = \frac{\pi}{2} + 3$, $y(1) = \left(e + \frac{1}{e}\right) \operatorname{arctg}(e) + e + \frac{2}{e}$

a) homogenní rovnice: $y'' - y = 0$, fundamentální systém: $\{y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}\}$

b) variace konstant: hledáme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$, kde C_1', C_2' splňují soustavu

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases} \quad \text{tj.} \quad \begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{-x} = 0 \\ C_1' e^x - C_2' e^{-x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ (= \tanh x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 C_1' e^x = \tanh x \\ 2 C_2' e^{-x} = -\tanh x \end{cases}$$

$C_1' = \dfrac{e^{-x}(e^x - e^{-x})}{2(e^x + e^{-x})}$; $C_1(x) = \frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{e^{-x}(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})} dx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{2} \displaystyle\int \frac{(u - \frac{1}{u}) du}{(u + \frac{1}{u}) u^2} = \frac{1}{2} \int \frac{u^2 - 1}{(u^2+1) u^2} du =$

$= \displaystyle\int \left(\frac{a}{u^2+1} + \frac{b}{u^2} \right) du =$

$a u^2 + b(u^2+1) = (a+b) u^2 + b = \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{matrix} a + b = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 1$$

$= \displaystyle\int \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\frac{1}{2}}{u^2} \right) du = \operatorname{arctg} u + \frac{1}{2u} + D_1$

$= \operatorname{arctg}(e^x) + \frac{1}{2} e^{-x} + D_1$

$C_2' = \dfrac{-e^x (e^x - e^{-x})}{2(e^x + e^{-x})}$; $C_2(x) = \displaystyle\int \frac{-e^x(e^x - e^{-x})}{2(e^x + e^{-x})} dx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{matrix} \right| = \frac{-1}{2} \int \frac{u - \frac{1}{u}}{u + \frac{1}{u}} du = \frac{-1}{2} \int \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du =$

$= \frac{-1}{2} \displaystyle\int \frac{u^2 + 1 - 2}{u^2 + 1} du = \frac{-1}{2} \int \left(1 - \frac{2}{u^2+1}\right) du = \int \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{u^2+1} \right) du = -\frac{u}{2} + \operatorname{arctg} u + D_2 = \frac{-e^x}{2} + \operatorname{arctg} e^x + D_2$

Takže,

$$y(x) = \left(\operatorname{arctg}(e^x) + \tfrac{1}{2} e^{-x} + D_1 \right) e^x + \left(-\tfrac{e^x}{2} + \operatorname{arctg} e^x + D_2 \right) e^{-x}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

c) počáteční podmínky: $y(0) = (\underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} + D_1) + (-\frac{1}{2} + \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\frac{\pi}{4}} + D_2) = \frac{\pi}{2} + D_1 + D_2$

$\overset{\shortparallel}{\frac{\pi}{2} + 3}$

tj. $D_1 + D_2 = 3$

$y(1) = (\operatorname{arctg} e + \frac{1}{2e} + D_1) e + (-\frac{e}{2} + \operatorname{arctg} e + D_2) e^{-1} = (e + \frac{1}{e}) \operatorname{arctg} e + D_1 e + \frac{D_2}{e}$

$\shortparallel \ (e + \frac{1}{e}) \operatorname{arctg}(e) + e + \frac{2}{e}$

$$\text{tj.} \begin{cases} D_1 e + \frac{D_2}{e} = e + \frac{2}{e} \\ D_1 + D_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} D_1 = 1 \\ D_2 = 2 \end{matrix}$$

<u>Výsledek:</u> $y(x) = \operatorname{arctg}(e^x) \cdot (e^x + e^{-x}) + e^x + 2e^{-x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

2. $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 3x, \quad y(1)=3, \quad y'(1)=10$

$D = \{(x,y) : x \neq 0\}$

a) homogenní rovnice $\quad y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$

hledame řešení ve tvaru $\; y(x) = x^{\lambda}$, potom $y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$, $y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$\lambda(\lambda-1) - 4\lambda + 6 = 0; \qquad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \qquad (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

fundamentální systém: $\{y_1(x) = x^2,\; y_2(x) = x^3\}$

b) variace konstant: hledame řešení nehomogenní rovnici ve tvaru

$y(x) = C_1(x)x^2 + C_2(x)x^3$, kde $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ splňují ~~rov~~ soustavu

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2 + C_2'(x)x^3 = 0 \\ C_1'(x)\cdot 2x + C_2'(x)\cdot 3x^2 = 3x \end{cases} \quad \overset{x\neq 0:}{} \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cdot x = 0 \\ 2C_1'(x) + 3C_2'(x)\cdot x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1'(x) = -3 \\ C_2'(x)\cdot x = 3 \end{cases}$$

$C_1(x) = -3x + D_1$

$C_2(x) = 3\log|x| + D_2$

tj. $\; y(x) = (-3x + D_1)x^2 + (3\log|x| + D_2)x^3, \qquad x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$

c) počáteční podmínky: $\; 3 = y(1) = (-3 + D_1) + D_2 = -3 + D_1 + D_2;$

$y'(x) = (-3x + D_1)\cdot 2x + (3\log|x| + D_2)\cdot 3x^2$

$10 = y'(1) = (-3 + D_1)\cdot 2 + 3D_2 = -6 + 2D_1 + 3D_2$

$$\begin{cases} D_1 + D_2 = 6 \\ 2D_1 + 3D_2 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} D_1 = 2 \\ D_2 = 4 \end{cases}$$

Výsledek: $\; y(x) = (-3x + 2)x^2 + (3\log|x| + 4)\cdot x^3$

$\qquad = 3\log x \cdot x^3 + x^3 + 2x^2, \quad x \in (0, +\infty)$

2'. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 3x^3, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 10.$ $\qquad D = \mathbb{R}^2$

Postupujeme jak v předchozí úloze, ale teď musíme zkusit prodloužit přes $x=0$:

$$y(x) = \begin{cases} 3\log x \cdot x^3 + x^3 + 2x^2, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \\ (-3x + D_1)x^2 + (3\log|x| + D_2)x^3, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Potřebujeme aby $y(x), y'(x), y''(x)$ ~~byli spojité~~ existovali v $x=0$.

Máme: ① $\exists \lim_{x\to +0} y(x) = 0$, $\exists \lim_{x\to -0} y(x) = 0 \Rightarrow y$ je spojité v $x=0$

② $y'(x) = \begin{cases} (-3x + 2)\cdot 2x + (3\log x + 4)\cdot 3x^2, & x \in (0, +\infty) \\ (-3x + D_1)\,2x + (3\log|x| + D_2)\cdot 3x^2, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$, potom

$\left.\begin{matrix} y \text{ spojitá v } x = 0_+ \\ \exists \lim_{x\to 0+} y'(x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists y'_+(0) = 0$

$\left.\begin{matrix} \exists \lim_{x\to 0-} y'(x) = 0 \\ y \text{ spojitá v } x = 0_- \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists y'_-(0) = 0$

$\Rightarrow \exists y'(0) = 0 \Rightarrow y'$ spojitá v $x=0$.

③ $\lim_{x\to 0+} y''(x) = 0$

$\lim_{x\to 0-} y''(x) = 2D_1$

Pokud chceme aby existovala $y''(x)$ v $x=0$, potřebujeme $D_1 = 0$. Parametr $D_2 \in \mathbb{R}$ zůstáva libovolným.

Výsledek: $\; y(x) = \begin{cases} 3\log x \cdot x^3 + x^3 + 2x^2, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \\ \ldots\, x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ $\qquad D_2 \in \mathbb{R}$ parametr hledáme řešení ve tvaru $y(x)=x^{\lambda}$, potom $y'(x)=\lambda x^{\lambda-1}$, $y''(x)=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$\lambda(\lambda-1)-4\lambda+6=0$; $\quad \lambda^2-5\lambda+6=0 \quad (\lambda-2)(\lambda-3)=0$

fundamentální systém: $\{y_1(x)=x^2,\ y_2(x)=x^3\}$

b) variace konstant: hledáme řešení nehomogenní rovnici ve tvaru

$y(x)=C_1(x)x^2+C_2(x)x^3$, kde $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ splňují ~~for~~ soustavu

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2+C_2'(x)x^3=0 \\ C_1'(x)\cdot 2x+C_2'(x)\cdot 3x^2=3x \end{cases} \quad \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)\cdot x=0 \\ 2C_1'(x)+3C_2'(x)\cdot x=3 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1'(x)=-3 \\ C_2'(x)\cdot x=3 \end{cases}$$

$C_1(x)=-3x+D_1$

$C_2(x)=3\log|x|+D_2$

tj. $y(x)=(-3x+D_1)x^2+(3\log|x|+D_2)x^3$, $\quad x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,+\infty)$

c) počáteční podmínky: $3=y(1)=(-3+D_1)+D_2=-3+D_1+D_2$; $\quad \begin{cases} D_1+D_2=6 \\ 2D_1+3D_2=16 \end{cases} \quad \begin{cases} D_1=2 \\ D_2=4 \end{cases}$

$y'(x)=(-3x+D_1)\cdot 2x+(3\log|x|+D_2)\cdot 3x^2$

$10=y'(1)=(-3+D_1)\cdot 2+3D_2=-6+2D_1+3D_2$

Výsledek: $y(x)=(-3x+2)x^2+(3\log|x|+4)\cdot x^3$

$\qquad = 3\log x\cdot x^3+x^3+2x^2, \quad x\in(0,+\infty)$

$D=\mathbb{R}^2$

2'. $x^2y''-4xy'+6y=3x^3$, $\quad y(1)=3$, $y'(1)=10$.

Postupujeme jak v předchozí úloze, ale teď musíme zkusit prodloužit přes $x=0$:

$$y(x)=\begin{cases} 3\log x\cdot x^3+x^3+2x^2, & x\in(0,+\infty) \\ 0, & x=0 \\ (-3x+D_1)x^2+(3\log|x|+D_2)x^3, & x\in(-\infty,0) \end{cases}$$

Potřebujeme aby $y(x), y'(x), y''(x)$ ~~byli spojité~~ existovali v $x=0$.

Máme: ① $\exists \lim_{x\to 0+} y(x)=0$, $\exists \lim_{x\to 0-} y(x)=0 \Rightarrow y$ je spojité v $x=0$

② $$y'(x)=\begin{cases} (-3x+2)\cdot 2x+(3\log x+4)\cdot 3x^2, & x\in(0,+\infty) \\ (-3x+D_1)2x+(3\log|x|+D_2)\cdot 3x^2, & x\in(-\infty,0) \end{cases}$$, potom

$\left.\begin{matrix} y \text{ spojitá v } x=0_+ \\ \exists \lim_{x\to 0+} y'(x)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists y_+'(0)=0$

$\left.\begin{matrix} \exists \lim_{x\to 0-} y'(x)=0 \\ y \text{ spojitá v } x=0_- \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists y_-'(0)=0$

$\Rightarrow \exists y'(0)=0 \Rightarrow y'$ spojitá v $x=0$.

③ $\lim_{x\to 0+} y''(x)=0$

$\lim_{x\to 0-} y''(x)=2D_1$

Pokud chceme aby existovala $y''(x)$ v $x=0$, potřebujeme $D_1=0$. Parametr $D_2\in\mathbb{R}$ zůstává libovolným.

Výsledek:
$$y(x)=\begin{cases} 3\log x\cdot x^3+x^3+2x^2, & x\in(0,+\infty) \\ 0, & x=0 \\ 3\log(-x)\cdot x^3+(D_2-3)x^3, & x\in(-\infty,0) \end{cases}$$ $D_2\in\mathbb{R}$ parametr

4. $y'' - 2y' = 8x+4$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$

připomeňme: $y''(x)+ay'(x)+by(x) = e^{cx}(P(x)\cos dx + Q(x)\sin dx)$

homogenní rovnice: $y''(x)+ay'(x)+by(x)=0$, hledáme řešení ve tvaru $y(x)=e^{\lambda x}$

charakteristický polynom: $\lambda^2+a\lambda+b=0$

fundamentální systém: $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ pokud $\lambda_1 \neq \lambda_2$

zejména, pokud $\lambda_1 = \lambda + i\mu$, $\lambda_2 = \lambda - i\mu$, $\{e^{\lambda}\cos\mu x, e^{\lambda}\sin\mu x\}$

pokud $\lambda_1=\lambda_2$, $\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\}$

nehomogenní rovnice:
partikulární řešení hledáme ve tvaru

$y_p(x) = e^{cx}x^m(R(x)\cos dx + T(x)\sin dx)$,

kde $\deg R = \max(\deg P, \deg Q)$
$\deg T = \max(\deg P, \deg Q)$

m odpovídá násobnosti kořenu $c+id$ pro charakteristický polynom:
$m=0$, pokud $c+id$ není kořen
$m=1$, ... kořen násobnosti 1.

---

a) homogenní rovnice $y''-2y'=0$, $\lambda^2-2\lambda=0$, $\lambda_1=0, \lambda_2=2$

$\{e^{2x}, 1\}$

b) $c=0$, $d=0$, $\deg P=1$, $c+id=0$ je kořen násobnosti 1 pro charakteristický polynom $\Rightarrow m=1$

hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$y_p(x) = x\cdot(ax+b) = ax^2+bx$; $y_p'(x)=2ax+b$; $y_p''(x)=2a$

dosadíme do původní rovnice:

$2a-2(2ax+b)=8x+4$; $\quad -4ax+2a-2b=8x+4$; $\begin{cases}-4a=8\\ 2a-2b=4\end{cases}$ $\begin{cases}a=-2\\ b=-4\end{cases}$

tj. $y_p(x) = -2x^2-4x$

kontrola: $y_p''(x)-2y_p'(x) = -4-2(-4x-4) = 8x+4$ ✓

c) obecné řešení nehomogenní rovnici = obecné řešení homogenní rovnici + partikulární řešení nehomogenní rovnici

Výsledek: $y(x) = -2x^2-4x+C_1x^2+C_2$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ - parametry

$= (C_1-2)x^2-4x+C_2$

6. $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

Pravé strana není ve tvaru $e^{cx}(P(x)\cos dx + Q(x)\sin dx)$,

ale každý jednotlivý výraz: x^2, $2e^{2x}$, je v tom tvaru.

Takže najdeme

y_{P1}: $y''_{P1} - 4y'_{P1} + 4y_{P1} = x^2$

y_{P2}: $y''_{P2} - 4y'_{P2} + 4y_{P2} = 2e^{2x}$

Potom řešení nehomogenní rovnici je

$$y_{ON}(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x) + \underbrace{y_{OH}(x)}_{\text{obecné řešení homogenní rovnici}}$$

a) homogenní rovnice:

$y'' - 4y' + 4y = 0$, $\quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad (\lambda-2)^2 = 0$

fundamentální systém: $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$

b) rovnice $y'' - 4y' + 4y = x^2$

$c=0, d=0, P(x) = x^2$, $\deg P = 2$

$c+id = 0$ není kořen charakteristického polynomu.

$y_{P1}(x) = ax^2 + bx + c$, $y'_{P1}(x) = 2ax + b$, $y''_{P1}(x) = 2a$

$2a - 4(2ax+b) + 4(ax^2+bx+c) = x^2$; $\quad x^2(4a) + x(-8a+4b) + (2a-4b+4c) = x^2$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ -8a+4b = 0 \\ 2a-4b+4c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{3}{8} \end{cases}$$

tj. $y_{P1}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$

kontrola: $\left(\frac{2}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) + x^2 + 2x + \frac{3}{2}$
$= x^2 + (2x - 2x) + \frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} = x^2$ ✓

c) rovnice $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$

$c=2, d=0, \deg P = 0$

$c+id = 2$ je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu $\Rightarrow m=2$

$y_{P2}(x) = e^{2x} \cdot x^2 \cdot a$; $\quad y'_{P2}(x) = ae^{2x}(2x^2+2x)$; $\quad y''_{P2}(x) = ae^{2x}(4x^2 + 4x + 4x + 2)$
$= ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2)$

$ae^{2x}(4x^2+8x+2) - 4ae^{2x}(2x^2+2x) + 4ae^{2x} \cdot x^2 = 2e^{2x}$

$e^{2x}x^2(4a - 8a + 4a) + e^{2x}x(8a - 8a) + e^{2x}(2a) = 2e^{2x}$; $\quad a = 1$

tj. $y_{P2}(x) = x^2 e^{2x}$

~~Výsledek:~~ $y(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x) + C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$
$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + x^2 e^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Výsledek: $y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} + e^{2x}(x^2 + C_2 x + C_1)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ parametry

7. $y''(x) - 2y'(x) + 10y(x) = \frac{9e^x}{\cos x}$ $\qquad D = \{(x,y) : x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

a) homogenní rovnice: $y''(x) - 2y'(x) + 10y(x) = 0$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, $(\lambda-1)^2 + 9 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$

fundamentální systém: $\{e^x \cos 3x,\ e^x \sin 3x\}$

b) nehomogenní rovnice: variace konstant,

$y(x) = C_1(x)\, e^x \cos 3x + C_2(x)\, e^x \sin 3x$, kde

$$\begin{cases} C_1'(x)\, e^x \cos 3x + C_2'(x)\, e^x \sin 3x = 0 \\ C_1'(x)\, (e^x \cos 3x)' + C_2'(x)\, (e^x \sin 3x)' = \frac{9e^x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x \cos 3x & e^x \sin 3x \\ (e^x \cos 3x)' & (e^x \sin 3x)' \end{vmatrix} = e^x \cos 3x \cdot (e^x \sin 3x)' - e^x \sin 3x \cdot (e^x \cos 3x)' =$$

$$= e^{2x} \cos 3x (\sin 3x + 3\cos 3x) - e^{2x} \sin 3x (\cos 3x - 3 \sin 3x) = 3e^{2x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \sin 3x \\ \frac{9e^x}{\cos x} & (e^x \sin 3x)' \end{vmatrix} = -\frac{9 \sin 3x \cdot e^{2x}}{\cos x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x \cos 3x & 0 \\ (e^x \cos 3x)' & \frac{9e^x}{\cos x} \end{vmatrix} = \frac{9 \cos 3x \cdot e^{2x}}{\cos x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3 \sin 3x}{\cos x}; \qquad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3 \cos 3x}{\cos x}$$

kontrola: $\frac{-3 \sin 3x}{\cos x} \cdot \cos 3x + \frac{3 \cos 3x}{\cos x} \cdot \sin 3x = 0$

$-\frac{3 \sin 3x}{\cos x} e^x (\cos 3x - 3 \sin 3x) + \frac{3 \cos 3x}{\cos x} e^x (\sin 3x + 3 \cos 3x) = \frac{9e^x}{\cos x}$ ✓

$$C_1(x) = \int \frac{-3 \sin 3x}{\cos x}\, dx = \int \frac{-3(3\sin x - 4\sin^3 x)\, dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{l} R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \\ \to u = \operatorname{tg} x,\ du = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ dx = \cos^2 x\, du \\ \quad = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} du = \frac{du}{1+u^2} \end{array} \right| = \int -3\left(3u - 4 \cdot \frac{u^3}{1+u^2}\right) \frac{du}{1+u^2}$$

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = u \cdot \frac{u^2}{1+u^2}$$

$$= -3 \int \frac{3u(1+u^2) - 4u^3}{(1+u^2)^2} du = -3 \int \frac{(3u - u^3)\, du}{(1+u^2)^2} = \left| \begin{array}{l} v = u^2 \\ dv = 2u\, du \end{array} \right|$$

$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

$\sin(a + 2a) = \sin a \cdot \cos 2a + \cos a \cdot \sin 2a$

$\quad = \sin a (1 - 2\sin^2 a) + \cos a \cdot 2 \sin a \cdot \cos a$

$\quad = \sin a - 2\sin^3 a + 2 \sin a (1 - \sin^2 a)$

$\quad = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

$$= -\frac{3}{2} \int \frac{(3-v)\, dv}{(1+v)^2} = -\frac{3}{2} \int \frac{[4 - (v+1)]\, dv}{(1+v)^2} = -6 \int \frac{dv}{(1+v)^2} + \frac{3}{2} \int \frac{dv}{v+1} = \frac{6}{1+v} + \frac{3}{2} \log|v+1| + D_1 = \left| \begin{array}{l} v = u^2 \\ = \operatorname{tg}^2 x \end{array} \right|$$

$$= \frac{6}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{3}{2} \log(1 + \operatorname{tg}^2 x) + D_1, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{6}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} + \frac{3}{2} \log\left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) + D_1$$

$$= 6\cos^2 x - \frac{3}{2} \log(\cos^2 x) + D_1$$

$$C_2(x) = 3\int \frac{\cos 3x \, dx}{\cos x} = 3\int \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x}\, dx = 3\int (4\cos^2 x - 3)\, dx = 3\int (2\cos 2x + 2 - 3)\, dx =$$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\cos(a+2a) = \cos a \cdot \cos 2a - \sin a \cdot \sin 2a$

$= \cos a (2\cos^2 a - 1) - 2\sin^2 a \cdot \cos a$

$= 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a (1 - \cos^2 a)$

$= 4\cos^3 a - 3\cos a$

$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$$= 3\int (2\cos 2x - 1)\, dx = 3\int \cos 2x \, d(2x) - 3x + D_2 = 3\sin 2x - 3x + D_2$$

tj., $C_1(x) = 6\cos^2 x - 3\log|\cos x| + D_1$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$

$C_2(x) = 3\sin 2x - 3x + D_2$

$y(x) = C_1(x) e^x \cos 3x + C_2(x) e^x \sin 3x$

$= (6\cos^2 x - 3\log|\cos x| + D_1)\cos 3x \cdot e^x + (3\sin 2x - 3x + D_2) \cdot \sin 3x \cdot e^x$

upravíme: $6\cos^2 x \cdot \cos 3x + 3\sin 2x \cdot \sin 3x =$

$= 3(2\cos^2 x - 1 + 1) \cdot \cos 3x + 3\sin 2x \cdot \sin 3x$

$= 3\cos 3x + 3 \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 3\sin 2x \cdot \sin 3x$

$= 3\cos 3x + 3\cos(2x - 3x) = 3\cos 3x + 3\cos x$

$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

$y(x) = (3\cos 3x + 3\cos x + D_1 \cos 3x + D_2 \sin 3x - 3\log|\cos x| \cdot \cos 3x - 3x\sin 3x) e^x$

$= (3\cos x - 3\log|\cos x| \cdot \cos 3x - 3x \cdot \sin 3x + \tilde{D}_1 \cos 3x + D_2 \sin 3x) e^x$

Výsledek: $y(x) = (3\cos x - 3\log|\cos x| \cdot \cos 3x - 3x \cdot \sin 3x + \tilde{D}_1 \cos 3x + D_2 \sin 3x) e^x$

$x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\forall \tilde{D}_1, D_2 \in \mathbb{R}$ parametry

---

nemůžeme prodloužit přes $x = \frac{\pi}{2}$: $x \to \frac{\pi}{2}- \Rightarrow \exists \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} y(x)$,

$\log|\cos x| \cdot \cos 3x \cdot e^x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2} + \pi k \pm]{} 0$ ale $\nexists \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} y'(x)$

$$(\log|\cos x| \cdot \cos 3x \cdot e^x)' = \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos 3x \cdot e^x}_{\exists \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-}} - \underbrace{\log|\cos x| \cdot 3\sin 3x \cdot e^x}_{\text{neexistuje konečná limita pro } x \to \frac{\pi}{2} \mp} + \underbrace{\log|\cos x| \cdot \cos 3x \cdot e^x}_{\exists \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-}}$$