1. $y' = 3x^2y^2$

a) stacionární řešení: $y = c \Rightarrow y' = 0 = 3x^2y^2 \Rightarrow y(x) \equiv 0$

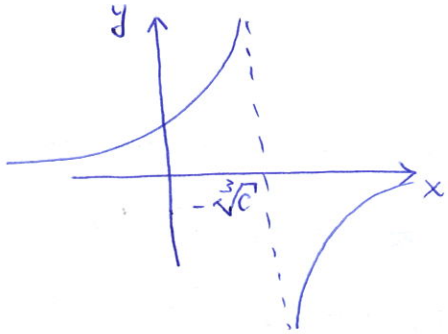
b) $y \neq 0$; $\quad \dfrac{y'(x)}{y^2(x)} = 3x^2; \quad \displaystyle\int \frac{y'(x)\,dx}{y^2(x)} = \int 3x^2 dx$

tam, kde $y'(x) \neq 0$, můžeme udělat substituci $u = y(x)$, $du = y'(x)dx$

tj. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = x^3 + C; \quad \frac{-1}{u} = x^3 + C; \quad \frac{-1}{y(x)} = x^3 + C; \quad \underline{y(x) = \frac{-1}{C + x^3}}$

ten vzorec platí buď pro $x^3 + C < 0$, nebo pro $x^3 + C > 0$,

tj. na intervalech $x < -\sqrt[3]{C}$ a na intervalu $x > \sqrt[3]{C}$



Výsledek:

a) $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$

b) $y(x) = \dfrac{-1}{C + x^3}$, $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{C})$ $\qquad C \in \mathbb{R}$ - libovolný parametr

c) $y(x) = \dfrac{-1}{C + x^3}$, $x \in (-\sqrt[3]{C}, +\infty)$

2. $y' = \sqrt{y}\, e^{-x}$

a) DO: $x \in (-\infty, +\infty)$; Obor hodnot: $y(x) > 0$

b) stacionární řešení: $y(x) = c \Rightarrow c = 0$, tj. $y(x) \equiv 0$

c) $y \neq 0$ $\quad \dfrac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = e^{-x}; \quad \displaystyle\int \frac{y'(x)\,dx}{\sqrt{y(x)}} = \int e^{-x} dx$; tam, kde $y'(x) \neq 0$, děláme substituci $y(x) = u$, $du = y'(x)dx$

$\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int e^{-x} dx; \quad 2\sqrt{u} = -e^{-x} + C; \quad \underline{2\sqrt{y(x)} = C - e^{-x};}$

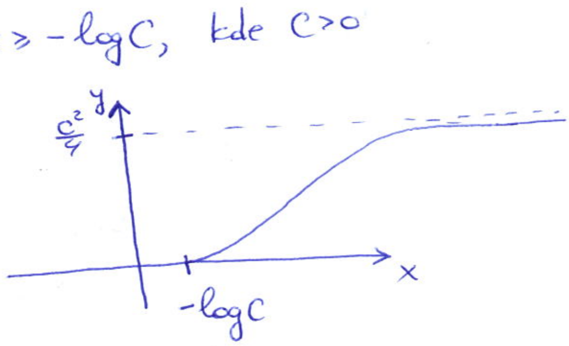
takže $C - e^{-x} \geq 0$, $\quad e^{-x} \leq C$; je možné jen pro $C > 0$

$-x \leq \log C$; $x \geq -\log C$, kde $C > 0$

c.1) Potom $y(x) = \frac{1}{4}(C - e^{-x})^2$, $x \geq -\log C$

v bodě $x \to -\log C + 0$ existuje jednostranná derivace:

$$\begin{cases} y \text{ spojitá na } [-\log C, +\infty) \\ \lim\limits_{x \to -\log C + 0} y'(x) = \lim\limits_{x \to -\log C + 0} \sqrt{y(x)}\, e^{-x} = \underbrace{\sqrt{y(-\log C + 0)}}_{=0}\, e^{-(-\log C)} = 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow \exists\, y'_+(-\log C) = 0$. $\quad$ Takže $y(x)$ můžeme prodloužit hladce za bod $-\log C$ vlevo s nulou, neboli stacionárním řešením.

Výsledek a) $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$

b) $y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(C - e^{-x})^2, & x \geq -\log C \\ 0, & x < -\log C \end{cases}$, $C > 0$ - parametr

3. $yy' = \frac{1-2x}{y}$

a) stacionární řešení: nejsou: $y(x)=C \Rightarrow 1-2x=0$ – ↯

b) $y\neq 0$: $\quad y^2y' = 1-2x; \quad \int y^2(x)\,y'(x)\,dx = \int(1-2x)\,dx$

tam, kde $y'(x)\neq 0$, děláme substituci $u=y(x)$, $du=y'(x)dx$

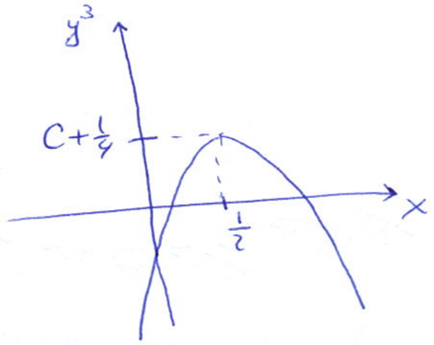
$$\int u^2\,du = \int(1-2x)\,dx; \quad \frac{u^3}{3} = x-x^2+C; \quad \frac{y^3(x)}{3} = x-x^2+C$$

$$\underline{y(x) = \sqrt[3]{3(x-x^2+C)}}$$

c) kde funkce y je diferencovatelná? Máme $y'(x) = \frac{1-2x}{y^2(x)}$,

takže tam, kde $y(x)\neq 0$

d) řešíme rovnici $y(x)=0$, tj. $x-x^2+C=0$; $\quad x^2-x=C$; $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = C+\frac{1}{4}$

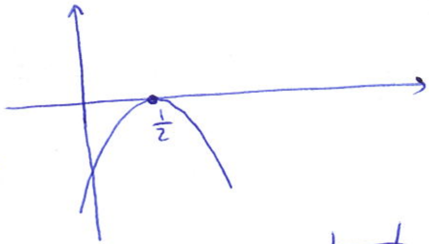


1) $C+\frac{1}{4}<0$. V tom případě $x-x^2+C<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$,

tj. $y(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$

a vzorec platí pro všechny x, $x\in(-\infty,+\infty)$

2) $C+\frac{1}{4}=0$



v tom případě jediný bod kde $y(x)=0$ je bod $x=\frac{1}{2}$.

derivace $y'(x)$ ale v tom bodě, ale mohla by existovat, kdyby existovala $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pm 0} y'(x)$

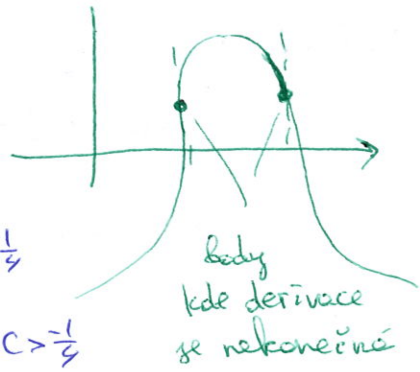
$$\begin{cases} y(x) \text{ spojitá na } [\tfrac{1}{2},+\infty) \\ \exists \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+0} y'(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+0} \frac{1-2x}{y^2(x)} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+0} \frac{1-2x}{\sqrt[3]{9(x-\frac{1}{2})^4}} = \infty \end{cases}$$

mocnina $(x-\frac{1}{2})$ v jmenovateli je větší než v čitateli.

Tomu ale není tak:

Takže y' neexistuje v $x=\frac{1}{2}$, a vzorec platí zvlášť pro intervaly $(-\infty,\frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2},+\infty)$

3) $C+\frac{1}{4}>0$. Máme 2 kořeny, $\frac{1}{2}\pm\sqrt{C+\frac{1}{4}}$. Vzorec platí zvlášť na intervalech $\left(-\infty, \frac{1}{2}-\sqrt{C+\frac{1}{4}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{C+\frac{1}{4}}, \frac{1}{2}+\sqrt{C+\frac{1}{4}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{C+\frac{1}{4}}, +\infty\right)$



__Výsledek__: a) $y(x) = \sqrt[3]{3(x-x^2+C)}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $C<-\frac{1}{4}$

b) $y(x) = \sqrt[3]{3(-\frac{1}{4}+x-x^2)}$, $x\in(-\infty,\frac{1}{2})$

c) $y(x) = \sqrt[3]{3(-\frac{1}{4}+x-x^2)}$, $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$

d) $y(x) = \sqrt[3]{3(x-x^2+C)}$, $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}-\sqrt{C+\frac{1}{4}}\right)$, pro $C>-\frac{1}{4}$

e) $y(x) = \sqrt[3]{3(x-x^2+C)}$, $x\in\left(\frac{1}{2}-\sqrt{C+\frac{1}{4}}, \frac{1}{2}+\sqrt{C+\frac{1}{4}}\right)$, pro $C>-\frac{1}{4}$

f) $y(x) = \sqrt[3]{3(x-x^2+C)}$, $x\in\left(\frac{1}{2}+\sqrt{C+\frac{1}{4}}, +\infty\right)$, pro $C>-\frac{1}{4}$

4. $xy' = -2-y, \quad y(1)=1$

a) stacionární řešení: $-2-y=0, \quad y=-2$ – řešení

b) $y \neq -2$, $x \neq 0$ $\quad \frac{y'}{y+2} = \frac{-1}{x}; \quad \int \frac{y'(x)dx}{y(x)+2} = \int \frac{-dx}{x};$

tam, kde $y'(x) \neq 0$, děláme substituci $u=y(x)$, $du=y'(x)dx$

$$\int \frac{du}{u+2} = -\log|x|+C; \quad \log|u+2| = -\log|x|+C;$$

$$|u+2| = \frac{e^C}{|x|}$$

$$u+2 = \frac{K}{x}; \quad K \in \mathbb{R}$$

$$y(x)+2 = \frac{K}{x}, \quad x<0 \text{ nebo } x>0$$

$y(x) = -2+\frac{K}{x}$ – to řešení existuje na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,+\infty)$

c) dosadíme počáteční ~~po~~ podmínku $y(1)=1$:

$-2+\frac{K}{1}=1; \quad K=3$. Také, nám zbývá jen interval $(0,+\infty)$

Výsledek: $y(x) = -2+\frac{3}{x}, \quad x \in (0,+\infty)$

5. $xy' = -(x+y)$.

Pravá strana $f(x,y) = \frac{-(x+y)}{x}$ je homogenní f-ce svých proměnných,

tj. $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y), \ \lambda \neq 0$. $\longrightarrow$ substituce $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

$$y(x) = x\,z(x)$$
$$y'(x) = \underline{x z'(x) + z(x)} \quad = \quad \frac{-(x+y)}{x} = -1-\frac{y}{x} = \underline{-1-z(x)}$$

Rovnice na z:

$$xz'+z = -1-z; \qquad xz' = -1-2z;$$

a) stac. řešení: $z = -\frac{1}{2}$

b) pro $z \neq -\frac{1}{2}, x \neq 0$: $\quad \frac{z'}{1+2z} = \frac{-1}{x}; \quad \int \frac{z'(x)dx}{1+2z(x)} = \int \frac{-dx}{x}; \ \log|1+2z(x)| = -\log|x|+C;$

$1+2z(x) = \frac{K}{x}$, $K \in \mathbb{R}$ (toto zahrnuje stacionární řešení: ~~pro K=0~~ dostáváme ho pro $K=0$)

$z(x) = \frac{-1}{2}+\frac{K}{2x}$, $x \in (-\infty,0)$ nebo $x \in (0,+\infty)$

$y(x) = x\,z(x) = \frac{-x}{2}+\frac{K}{2}$

Výsledek: a) $y(x) = \frac{-x}{2}+\frac{K}{2}$, $x \in (-\infty,0)$, $K \in \mathbb{R}$ } parametr

b) $y(x) = -\frac{x}{2}+\frac{K}{2}$, $x \in (0,+\infty)$, $K \in \mathbb{R}$

6. $xyy' = y^2 - x^2$

a) substituce $z(x) = \frac{y(x)}{x}$; $y(x) = x\,z(x)$; $y'(x) = x z'(x) + z(x)$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy} \qquad (\text{pro } x, y \neq 0)$$

$$x z' + z = \frac{y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy}$$

$x z' + z = z - \frac{1}{z}$; $\quad x z' = -\frac{1}{z}$; $\quad z z' = \frac{-1}{x}$; $\quad \int z(x) z'(x)\,dx = \int \frac{-dx}{x}$;

$$\underline{\tfrac{1}{2} z^2(x) = -\log|x| + C;}$$

pravá strana musí být ≥ 0:

$C - \log|x| \geq 0$; $\log|x| \leq C$, $\quad 0 < |x| \leq e^C$

$z(x) = \sqrt{2(C - \log|x|)}$, $\quad x \in (-e^C, 0)$ nebo $x \in (0, e^C)$

$y(x) = x\,z(x) =$
$= x\sqrt{2(C - \log|x|)}$, $\quad x \in (-e^C, 0)$ nebo $x \in (0, e^C)$

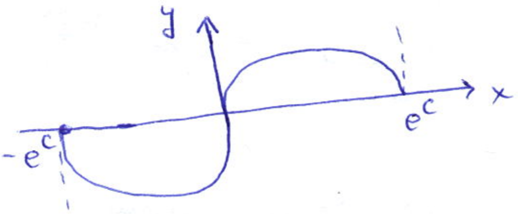
b) vzorec nejde prodloužit za bod $x = 0$: $\quad y'(x) = \sqrt{2(C - \log|x|)} + \dfrac{x \cdot \frac{-1}{x}}{\sqrt{2}\sqrt{(C - \log|x|)}}$
$= \sqrt{2(C - \log|x|)} - \dfrac{1}{\sqrt{2(C - \log|x|)}}$

neexistuje $\lim\limits_{x \to 0\pm} y'(x)$.

c) vzorec nejde prodloužit za bod $x = e^C$: $\quad y'(x) = \dfrac{y^2(x) - x^2}{x\,y(x)} \xrightarrow[x \to e^C - 0]{} \left.\dfrac{0 - x^2}{x \cdot y(x)}\right|_{x = e^C} = \infty$

<u>Výsledek:</u> (a) $y(x) = x\sqrt{2(C - \log(-x))}$, $x \in (-e^C, 0)$, $C \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = x\sqrt{2(C - \log x)}$, $x \in (0, e^C)$, $C \in \mathbb{R}$



7. $y' = \frac{y}{x} - 1$

substituce $z = \frac{y}{x}$; $\quad y' = (zx)' = x z' + z$

$x z' + z = z - 1$; $\quad x z' = -1$; $\quad z' = \frac{-1}{x}$; $\quad z(x) = -\log|x| + C$; $\quad y(x) = -x\log|x| + Cx$, $\quad x > 0$ nebo $x < 0$

<u>Výsledek:</u> (a) $y(x) = x(C - \log(-x))$, $x \in (-\infty, 0)$

(b) $y(x) = x(C - \log x)$, $x \in (0, +\infty)$

řešení nejde prodloužit přes bod $x = 0$: $\quad y'(x) = \frac{y(x)}{x} - 1 = z(x) - 1 = -\log|x| + C - 1$,
tj. neexistuje $\lim\limits_{x \to 0\pm} y'(x)$.

8. $xy' + y = \log x + 1$, DO: $x>0$

a) homogenní rovnice: $xy' + y = 0$

$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$; $\int \frac{y'(x)dx}{y(x)} = \int \frac{-dx}{x}$; $\log|y(x)| = -\log|x| + C$; $y(x) = \frac{K}{x}$, $K \in \mathbb{R}$, $x>0$ nebo $x<0$

b) řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$y(x) = \frac{K(x)}{x}$, s nějakou funkcí $K(x)$.

$y'(x) = \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}$; $xy'(x) = K'(x) - \frac{K(x)}{x}$; $xy'(x) + y(x) = K'(x) = \log x + 1$

$K'(x) = \log x + 1$, $K(x) = \int(\log x + 1)dx = x\log x + C$

$y(x) = \frac{K(x)}{x} = \log x + \frac{C}{x}$, $x>0$

Výsledek: $y(x) = \log x + \frac{C}{x}$, $x>0$

9'. $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$

a) homogenní rovnice: $y' + \frac{x+1}{x}y = 0$; $\frac{y'}{y} = -\frac{x+1}{x}$; $\int \frac{y'(x)dx}{y(x)} = \int \frac{-(x+1)}{x}dx$

$\log|y(x)| = -x - \log|x| + C$; $y(x) = K\frac{e^{-x}}{x}$, $K \in \mathbb{R}$, $x>0$ nebo $x<0$

b) hledáme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$y(x) = \frac{K(x)e^{-x}}{x}$, s nějakou funkcí $K(x)$

$y'(x) = K'(x)\frac{e^{-x}}{x} - \frac{K(x)e^{-x}}{x} - \frac{K(x)e^{-x}}{x^2}$; $y'(x) + \frac{x+1}{x}y(x) = K'(x)\frac{e^{-x}}{x} = 3xe^{-x}$

$K'(x) = 3x^2$; $K(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$

$y(x) = \frac{K(x)e^{-x}}{x} = \left(x^2 + \frac{C}{x}\right)e^{-x}$, $x>0$ nebo $x<0$

Výsledek: (a) $y(x) = x^2e^{-x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

(b) $y(x) = \left(x^2 + \frac{C}{x}\right)e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$, $C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(c) $y(x) = \left(x^2 + \frac{C}{x}\right)e^{-x}$, $x \in (0, +\infty)$, $C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

---

9. $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$, $y(1) = \frac{-1}{e}$

do předchozí úlohy dosadíme počáteční podmínku: $\left(x^2 + \frac{C}{x}\right)e^{-x}\Big|_{x=1} = \frac{-1}{e}$;

$(1+C)e^{-1} = \frac{-1}{e}$; $1 + C = -1$; $C = -2$. Dále, počáteční bod $x=1$ určuje, že musíme vybrat interval $x \in (0, +\infty)$

Výsledek: $y(x) = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)e^{-x}$, $x \in (0, +\infty)$

10. $y' + y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = 3$

(a) homogenní rovnice

$y' + y\cos x = 0$; $\quad \frac{y'}{y} = -\cos x$; $\quad \int \frac{y'(x)dx}{y(x)} = \int -\cos x \, dx$; $\log|y(x)| = -\sin x + C$;

$y(x) = K e^{-\sin x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

(b) nehomogenní rovnice:

$y(x) = K(x) e^{-\sin x}$; $\quad y'(x) = K'(x) e^{-\sin x} - K(x) e^{-\sin x} \cdot \cos x$;

$$y'(x) + y(x)\cos x = \underline{K'(x) e^{-\sin x} = \sin 2x}$$

$K'(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin x}$; $\quad K(x) = \int \sin 2x \cdot e^{\sin x} dx = 2\int \sin x \cdot \cos x \, e^{\sin x} dx$

$= 2\int \sin x \, e^{\sin x} d(\sin x) = \left| u = \sin x \right|$

$= 2\int u e^u du = 2 u e^u - 2\int e^u du =$

$= 2(u-1)e^u + C = 2(\sin x - 1) e^{\sin x} + C$

$y(x) = K(x) e^{-\sin x}$

$= 2(\sin x - 1) + C e^{-\sin x}$

(c) počáteční podmínka: $y(0) = 3$

$2(-1) + Ce^0 = 3$; $\quad -2 + C = 3$; $C = 5$

Výsledek: $y(x) = 2(\sin x - 1) + 5e^{-\sin x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

11. $y' = \frac{y \log y}{\sin x}$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e}$ $\quad$ obor hodnot: $y > 0$, definiční obor: $x \in (\pi k, \pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{y'(x)}{y(x)\log y(x)} = \frac{1}{\sin x}$; $\quad \int \frac{y'(x)dx}{y(x)\log y(x)} = \int \frac{dx}{\sin x}$; $\quad \int \frac{dy}{y \log y} = \int \frac{dx}{\sin x}$

1) $\int \frac{dy}{y\log y} = \int \frac{d(\log y)}{\log y} = \log|\log y| + C$

2) $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \; dt = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}(t^2+1)dx; \; dx = \frac{2dt}{t^2+1} \\ \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{t^2+1} \end{array} \right|$

$= \int \frac{2dt}{(t^2+1) \cdot \frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C_k$; $\quad$ Kontrola: $(\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|)' = \frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$x \in (-\pi + \pi k, \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$

3) $\log|\log y(x)| = \log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$

$\log y(x) = K \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $\quad y(x) = \exp[K \operatorname{tg}\frac{x}{2}]$, $x \in (-\pi + \pi k, \pi + \pi k)$

4) počáteční podmínka: $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e}$; $\quad \exp[K \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}] = \frac{1}{e}$; $\quad \exp K = \frac{1}{e}$; $K = -1$

Průnik s definičním oborem: $x \in (\pi k, \pi(k+1)) \ni \frac{\pi}{2}$ tj. $k = 0$

nám dává

~~Výsledek: $y(x) = \exp[\operatorname{tg}\frac{x}{2}]$, $x \in (\ldots)$~~

~~5) Jde prodloužit? → příští ...~~

$\boxed{\text{Výsledek: } y(x) = \exp\left[-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right], x \in (0, \pi)}$

11. Uvažujme rovnici $\sin x \cdot y' = y \log y$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e}$, a dodefinujeme $y \log y$ nulou pro $y=0$.

Máme řešení

$$y(x) = \exp\left[-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right], \quad x \in (-\pi, \pi)$$

Jde prodloužit?

a) $x \to -\pi+0$: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \to -\infty$; $y(x) \to +\infty$: nejde prodloužit za bod $-\pi$

b) $x \to \pi - 0$: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \to +\infty$; $y(x) \to 0$; $y'(x) = \dfrac{y(x)\log y(x)}{\sin x} = \dfrac{e^{-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot (-\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{\sin x} \xrightarrow[x \to \pi - 0]{} 0$

Takže ~~jde prod~~ nejsou překážky k prodloužení za bod $x = \pi$.

c) vezmeme nějaké řešení na intervalu $(\pi, 3\pi)$ a slepíme v bodě π

$$y(x) = \exp\left[K \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right], \quad x \in (\pi, 3\pi).$$

Aby existovala limita pro $x \to \pi + 0$, potřebujeme aby $K > 0$:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \to -\infty; \; y(x) \to 0, \; y'(x) \to 0.$$

Toto ale už nebude možné prodloužit za bod 3π vpravo: $y(x) \xrightarrow[x \to 3\pi - 0]{} +\infty$

Výsledek:
$$y(x) = \begin{cases} \exp\left[-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right], & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = \pi \\ \exp\left[K \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right], & x \in (\pi, 3\pi), \; K > 0 - \text{parametr} \end{cases}$$

12. $xy' = y \log\frac{y}{x}$, $y(1) = e^3$, DO: $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$

$\frac{y}{x} > 0$

a) substituce $z = \frac{y}{x}$; $y(x) = x z(x)$, $y'(x) = x z'(x) + z(x)$

$$y' = \frac{y}{x}\log\frac{y}{x}; \quad xz' + z = z \log z; \quad xz' = z(\log z - 1);$$

a.1) stacionární řešení: $z = c \Rightarrow \log c - 1 = 0$; $c = e$, tj. $\underline{z(x) = e}$ – stacionární řešení

a.2) $z \neq e$; $\dfrac{z'}{z(\log z - 1)} = \dfrac{1}{x}$; $\displaystyle\int \frac{z'(x)\,dx}{z(x)(\log z(x) - 1)} = \int \frac{dx}{x}$; $\displaystyle\int \frac{dz}{z(\log z - 1)} = \log|x| + C$;

$$\int \frac{d(\log z)}{\log z - 1} = \log|x| + C; \quad \log|\log z - 1| = \log|x| + C; \quad \log z(x) - 1 = K \cdot x;$$

$\log z(x) = 1 + Kx$; $\underline{z(x) = e^{Kx+1}, \; K \in \mathbb{R}}$ (zahrnuje stac. řešení: pro $K=0$ $z \equiv e$)

$$y(x) = x z(x) = x e^{Kx+1},$$

P.p.: $y(1) = e^3$; $1 \cdot e^{K+1} = e^3$; $K = 2$; $y(x) = x e^{2x+1}$, $x > 0$.

Řešení jde prodloužit za bod $x=0$, ale respektujeme definiční obor funkci $y \log\frac{y}{x}$

Výsledek: $y(x) = x e^{2x+1}$, $x \in (0, +\infty)$.