

Riemannův-Stieltjesův integrál, týden 9, cvičení 16

Spočítejte hodnoty následujících Riemannových-Stieltjesových integrálů

$$1. \int_0^{10} x d(x + [x])$$

$$2. \int_0^4 ([\sqrt{x}] + x^2) d(\sqrt{x})$$

$$3. \int_{-5}^{10} e^{-3x} dg(x), \text{ kde } g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 2, \\ 5, & 2 \leq x < 3, \\ 6, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$4. \int_{-3}^3 f(x) dg(x), \text{ kde } g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases} \quad \text{a } f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 0, \\ 3 - 4x, & 0 < x < 1, \\ -1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$5. \int_0^1 x^n dF(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \text{ kde } F \text{ je Cantorova funkce (Cantorovy schody).}$$

Bonus

$$6.* \text{ Pro } s > 1, \text{ definujeme } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \text{ Doka\u017ete, \u017ee } \zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[x] dx}{x^{s+1}} = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{(x - [x]) dx}{x^{s+1}}.$$

$$7.* \text{ Definujme } f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt. \text{ Doka\u017ete, \u017ee } |f(x)| < \frac{1}{x} \text{ pro } x > 0.$$

$$8.* \text{ Definujme } f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t) dt. \text{ Doka\u017ete, \u017ee } |f(x)| < 2e^{-x} \text{ pro } x > 0.$$

Riemannův-Stieltjesův integrál, týden 9, cvičení 16

Spočítejte hodnoty následujících Riemannových-Stieltjesových integrálů

$$1. \int_0^{10} x d(x + [x])$$

$$2. \int_0^4 ([\sqrt{x}] + x^2) d(\sqrt{x})$$

$$3. \int_{-5}^{10} e^{-3x} dg(x), \text{ kde } g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 2, \\ 5, & 2 \leq x < 3, \\ 6, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$4. \int_{-3}^3 f(x) dg(x), \text{ kde } g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases} \quad \text{a } f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 0, \\ 3 - 4x, & 0 < x < 1, \\ -1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$5. \int_0^1 x^n dF(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \text{ kde } F \text{ je Cantorova funkce (Cantorovy schody).}$$

Bonus

$$6.* \text{ Pro } s > 1, \text{ definujeme } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \text{ Doka\u017ete, \u017ee } \zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[x] dx}{x^{s+1}} = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{(x - [x]) dx}{x^{s+1}}.$$

$$7.* \text{ Definujme } f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt. \text{ Doka\u017ete, \u017ee } |f(x)| < \frac{1}{x} \text{ pro } x > 0.$$

$$8.* \text{ Definujme } f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t) dt. \text{ Doka\u017ete, \u017ee } |f(x)| < 2e^{-x} \text{ pro } x > 0.$$

Některé výsledky.

1. 105

2. $\frac{37}{5}$

3. $2 + 3e^{-6} + e^{-9}$

5. $n = 0 : 1, n = 1 : \frac{1}{2}$.