

1. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. (a) $|a + b| \leq |a| + |b|$
(b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$
3. $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$
4. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, kde $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k = 0, \dots, n$, $0! := 1$.
5. $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$;
rovnost je dosaženo právě tehdy, kdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.
6. $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. [Návod: buď matematická indukce, nebo AG nerovnost]
7. $(n+1)^n \leq n^{n+1}$. [Návod: indukce + Liouvilleová nerovnost]
8. $(n+1)^n \leq 3n^n$ [Návod: binomická věta]
- 9.* $(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$
10.
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \quad a_1 > 0, \dots, a_n > 0$$
11. Necht' $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$. Potom
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 \geq x_2^2 + 2x_1 x_3.$$
- 12.**
$$\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} + \sqrt{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} + \sqrt{(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)} \geq a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca.$$