

Spojítost funkcí

1. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1, \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

je spojitá v iracionálních bodech a není spojitá v racionálních bodech.

2. Najděte funkci, která je spojitá právě v bodě $x = 0$.
3. Nechtě f, g jsou spojitě funkce. Potom jsou funkce $\max(f, g), \min(f, g)$ také spojitě.
4. Nechtě $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je spojitá. Potom $\exists x_0 \in [0, 1] : f(x_0) = x_0$.
5. Nechtě $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. Může se stát, že v každém bodě $x \in D_f$ existuje nevlastní limita?
6. Nechtě $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Může se stát, že v každém bodě $x \in D_f$ existuje nevlastní limita?
- 7.* Nechtě $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jsou spojitě a platí $\forall x \in [0, 1] : f(x) \neq g(x)$. Může se stát, že $\forall x \in [0, 1] : f(g(x)) = g(f(x))$?
- 8.* Nechtě $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je bijekce. Potom funkce f je spojitá aspoň v jednom bodě. Dokažte nebo vyvráťte.

Limity funkcí

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right)$ 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+\sin x} \right)$ 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{n}{n+\sin n} \right)$

12.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cosh x)^{\frac{\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right)}{(\sinh x - x) \arctan x}}$$

13.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x - \sin(x)(1 - \cos x)}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{arcsinh}(x)^5}}$$

Výsledky

9. $\frac{1}{2}$ 10. neexistuje 11. neexistuje 12. $\sqrt{e}$ 13. $\sqrt[4]{e}$