

Máme skoro vše potřebné pro hledané charakterizace. Uvědomíme si, že Když nemá prostor X izolovaný bod, jsou všechny neprázdné otevřené množiny nekonečné. Doplňme, že lexikografické uspořádání na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vytváří svými otevřenými intervaly stejnou topologii jako metrika d_B . Opravdu, každý otevřený interval $(\{k_n\}, \{l_n\})$, kde m je první index s $k_m \neq l_m$, obsahuje báзовou množinu $\{\{p_n\} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; p_n = k_n \text{ pro } k \leq m+1, p_{m+2} = k_{m+2} + 1\}$ v d_B ; obráceně, každá báзовá množina $B_{\{k_n\}, m} = \{\{p_n\}; p_n = k_n \text{ pro } n \leq m\}$ v d_B obsahuje otevřený interval $(\{k'_n\}, \{k''_n\})$, kde $k_n = k'_n = k''_n$ pro $n \leq m$ a $k'_{m+1} + 1 < k''_{m+1}$.

Věta 2.10. Charakterizace $\mathbb{P}$ (Aleksandrov a Urysohn, 1928)

Metrický prostor je homeomorfní s prostorem $\mathbb{P}$ iracionálních čísel právě když je separabilní, nuldimenzionální, topologicky úplný a nikde lokálně kompaktní.

Důkaz. Prostor $\mathbb{P}$ má uvedené vlastnosti. Vezmeme nyní metrický prostor (X, d) s uvedenými vlastnostmi a dokážeme, že je homeomorfní s $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$, což dá naše tvrzení. Můžeme předpokládat, že d je úplná metrika. Víme z Věty 2.9, že existuje homeomorfní zobrazení $\varphi : (X, d) \rightarrow (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$, Stačí tedy dokázat, že φ vhodně sestrojené v důkazu 2.9 je surjekcí. Nejdříve si uvědomíme, že vlastnost nikde lokálně kompaktní implikuje pro každou otevřenou neprázdnou množinu G existenci obojetného pokrytí množiny G , z kterého nelze vybrat konečné pokrytí (Borelova charakterizace kompaktnosti pomocí otevřených pokrytí). Lze tedy sestrojit silně nuldimenzionální bázi v $\mathbb{P}$, ve které je každý prvek $B_{k_1, \dots, k_n}$ rozdělen na spočetně mnoho neprázdných množin $\{B_{k_1, \dots, k_n, m}\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Vezmeme libovolný prvek $\{k_n\} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ten je obrazem prvku $x \in X$, jestliže $x \in \bigcap \{B_{k_1, \dots, k_n}; n \in \mathbb{N}\}$. Stačí tedy ukázat, že uvedený průnik je neprázdný. Množiny $B_{k_1, \dots, k_n}$ jsou uzavřené, neprázdné, tvoří klesající posloupnost množin s průměry konvergující k 0. Podle Cantorovy věty je průnik neprázdný, protože jsme vzali ekvivalentní úplnou metriku d . Důkaz je hotov. $\square$

Protože uvedené vlastnosti $\mathbb{P}$ sae zavhovávají součiny, platí následující tvrzení.

Důsledek 2.11

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{P}^n$ i $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ homeomorfní s $\mathbb{P}$.

Podíváme se nyní na charakterizaci Cantorovy množiny. Postup bude podobný jako v předchozím důkazu.

Věta 2.12. Charakterizace $\mathbb{C}$ (Brouwer, 1909)

Metrický prostor je homeomorfní s Cantorovým prostorem $\mathbb{C}$ právě když je neprázdný, kompaktní, nuldimenzionální a nemá izolované body.

Důkaz. Prostor $\mathbb{C}$ má uvedené vlastnosti a podle konstrukce silně nuldimenzionální báze v $\mathbb{C}$ za Definici 2.7 je zobrazení $\varphi : |b.c \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zobrazení do $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Ukážeme, že každý prostor X s vlastnostmi z našeho tvrzení je homeomorfní s $(\{1, 2\}^{\mathbb{N}}, d_B)$. Musíme tedy sestrojit silně nuldimenzionální bázi v X , kde se každá množina $B_{k_1, \dots, k_n}$ rozděluje jen na dvě množiny $B_{k_1, \dots, k_n, 1}, B_{k_1, \dots, k_n, 2}$, tj. čísla k_n nabývají njen hodnot 1, 2. Toto rozdělení je snadné, ale musíme dávat pozor, abychom dostali otevřenou bázi v X , tj. pro každé $\{k_n\} \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ musí průměry množin $B_{k_1, \dots, k_n, m}, m \in \mathbb{N}$, konvergovat k 0.

Protože X má obojetnou bázi, lze každé otevřené pokrytí X (např. loulemi o daném poloměru) zjemnit obojetným pokrytím. Vezmeme obojetné pokrytí X neprázdnými množinami o průměru menším než 1. Pokud takové pokrytí existuje dvouprvkové, máme první krok hotový a označíme toto rozdělení B_1, B_2 . Pokud minimální počet získaného pokrytí $\{C_1, \dots, C_p\}$ je $p > 2$, položíme $B_1 = C_1, B_2 = C_2 \cup \dots \cup C_p$. V dalším kroku libovolně eozdělíme B_1 na neprázdné, obojetné a disjunktní B_{11}, B_{12} a položíme $B_{21} = C_2, B_{22} = C_3 \cup \dots \cup C_p$. Pokud $p = 3$, jsme hotovi, pokud $p > 3$, pokračujeme stejným způsobem dále. Po $p - 1$ krocích dostaneme rozdělení $\{B_{k_1, \dots, k_{p-1}}\}$ neprázdnými obojetnými množinami o průměru menším než 1, přičemž $k_i \in \{1, 2\}$. Dále postupujeme podobně pro průměry menší než 1/2, atd. Tím získáme hledanou silně nuldimenzionální bázi.

Příslušné zobrazení $\varphi : X \rightarrow \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ je surjekce, protože X je kompaktní a tedy průnik $\bigcap_n B_{k_1, \dots, k_n}$ je neprázdný (a jednobodový), např. x a pak $\varphi(x) = \{k_n\}$. Všechny prostory s vlastnostmi z našeho tvrzení (včetně $\mathbb{C}$) jsou tedy homeomorfní s $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}, d_B$ a tedy homeomorfní navzájem. $\square$

Důsledek 2.13

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ homeomorfní s $\mathbb{C}$.

Součin spočetně mnoha aspoň dvoubodových kompaktních nuldimenzionálních prostorů je homeomorfní s $\mathbb{C}$

Podobně, ale s trochu jiným závěrečným postupem, získáme charakterizaci $\mathbb{Q}$. Je to proto, že $\mathbb{Q}$ není topologicky úplný a některé průniky $\bigcap_n B_{k_+, \dots, k_n}$ mohou být prázdné.

Věta 2.14. Charakterizace $\mathbb{Q}$ (Sierpiński, 1920)

Metrický prostor je homeomorfní s $\mathbb{Q}$ právě když je spočetný a nemá izolované body.

Důkaz. Prostor $\mathbb{Q}$ má uvedené vlastnosti. Necht X je spočetný (tedy nuldimenzionální) bez izolovaných bodů. Žádná neprázdna otevřená množina tedy nemůže být kompaktní. Protože existuje spočetné pokrytí X koulemi o stejném daném poloměru. Lze rozdělit X na spočetně mnoho neprázdnych obojetných množin $B_n, n \in \mathbb{Z}$ o průměru menším než 1. Každé B_n lze rozdělit na spočetně mnoho neprázdnych obojetných množin $B_{n,m}, m \in \mathbb{Z}$ o průměru menším než $1/2$, atd. Dostaneme silně nuldimenzionální bázi a k ní příslušné vnoření $\varphi : X \rightarrow (\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, d_B)$. Podíváme se na podprostor $Y = \varphi(X)$. Ten dědí z $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ lineární uspořádání. Ukážeme, že $(Y, \leq)$ nemá první ani poslední prvek a každý otevřený interval $(y_1, y_2) \cap \varphi(X)$ pro $y_1 < y_2$ je neprázdny (tj. uspořádání na Y je husté).

Vezmeme libovolné dva prvky $y_1 = \{k_n\} < y_2 = \{l_n\}$, které jsou obrazy bodů $x_1, x_2 \in X$, tj. $x_1 \in \bigcap_m B_{k_1, \dots, k_m}, x_2 \in \bigcap_m B_{l_1, \dots, l_m}$. Necht n je první index, že $k_n < l_n$. Pak vezmeme $u \in B_{k_1, \dots, k_n, p}, p < k_{n+1}$, takže $\varphi(u) < y_1$. Podobně najdeme $v \in X$, že $\varphi(v) > y_2$. Tím jsme ukázali, že $\varphi(X)$ nemá první ani poslední prvek. Dále najdeme $z \in B_{k_1, \dots, k_n, k_{n+1}, q}$, kde $q > k_{n+2}$. Potom $y_1 < \varphi(z) < y_2$.

Cantor ukázal, že libovolné dvě spočetné množiny s hustým uspořádáním a bez prvních a posledních prvků jsou isomorfní ve smyslu uspořádání (existuje bijekce zachovávající uspořádání). To ale znamená, že prostory s otevřenými intervaly jako bázemi jsou homeomorfní. Takže prostor X je homeomorfní s $\varphi(X)$ a ten je homeomorfní s $\mathbb{Q}$. $\square$

Důsledek 2.15

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{Q}^n$ homeomorfní s $\mathbb{Q}$.

Charakterizace $\mathbb{R}$ jsou složitější a mají ve vlastnostech souvislost. Říkámě, že prostor je souvislý, jestliže jediné obojetné množiny v X jsou $\emptyset, X$, tj. každé spojitě zobrazení do libovolného diskrétního prostoru je konstantní. Protože souvislost jsme neprobírali a ne vždy je probírána v přednáškách MA, budeme jen konstatovat, že $\mathbb{R}$ je souvislý prostor a každý interval v $\mathbb{R}$ je souvislý, takže $\mathbb{R}$ je i lokálně souvislý, tj. okolo každého bodu existují libovolně malá souvislá okolí (tato vlastnost obecně nevyplývá ze souvislosti celého prostoru).

Věta 2.16. Charakterizace $\mathbb{R}$ (Ward 1035)

Metrický prostor X je homeomorfní s $\mathbb{R}$ právě když je souvislý, lokálně souvislý, separabilní a pro každé $x \in X$ se $X \setminus \{x\}$ skládá ze dvou maximálních souvislých množin.

Místo lokální souvislosti lze vzít lokální kompaktnost a za dalších podmínek lze v poslední vlastnosti požadovat jen, že $X \setminus \{x\}$ jsou nesouvislé prostory.

Důkazy jsou náročné a dosti dlouhé. Často se v průběhu důkazu zavede uspořádání. Pokud budeme existenci uspořádání předpokládat, bude důkaz jednodušší a taková věta už vyplývá z poznámek Cantora. K důkazu musíme vědět, že prostor s hustým lineárním uspořádáním, jehož otevřené množiny tvoří otevřenou bázi, je souvislý, právě když uspořádání je omezeně úplné (tj. každá omezená množina má supremum a infimum).

Věta 2.17. Charakterizace $\mathbb{R}$ (Cantor, 1895)

Metrický prostor je homeomorfní s $\mathbb{R}$ právě když je souvislý, separabilní a existuje lineární uspořádání na X bez prvního a posledního prvku, jehož otevřené intervaly tvoří bázi X .

Důkaz. Vezmeme spočetnou hustou množinu D v X . Zúžení uspořádání na D je husté a nemá první ani poslední prvek (protože X je souvislý a žádný otevřený interval neobsahuje první nebo poslední prvek). Podle Cantorovy věty o isomorfismu spočetných uspořádaných prostorů (viz poslední odstavec předchozího důkazu), existuje isomorfismus D na $\mathbb{Q}$. Podle Dedekindovy věty o jednoznačném rozšíření isomorfismu na uspořádané úplnění jsou isomorfní i X a $\mathbb{R}$, takže jsou i homeomorfní. $\square$

Předchozí charakterizace není zcela vnitřní a používá uspořádatelnost. Existuje ale vnitřní charakterizace prostorů X , jejichž otevřená báze je složená z otevřených intervalů nějakého uspořádání. Např. (van Dalen, Wattel v r. 1973): X má subbázi tvaru $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, kde $\mathcal{S}_i$ jsou lineárně uspořádané inkluze a platí

$$T \in \mathcal{S}_i, T = \bigcap \{S_i \in \mathcal{S}_i; T \subset S_i\} \Rightarrow T = \bigcup \{S_i \in \mathcal{S}_i; T \supset S_i\}.$$