

Definice 2.6. Lokálně kompaktní prostory

Metrický prostor se nazývá *lokálně kompaktní*, jestliže pro každý jeho bod x existuje $r > 0$, že $B_r(x)$ je kompaktní množina. Metrický prostor X je *nikde lokálně kompaktní*, jestliže žádná koule v X není kompaktní.

Kompaktní prostory jsou zřejmě lokálně kompaktní, Prostory $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ jsou lokálně kompaktní. Prostory $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nejsou lokálně kompaktní. Každá otevřená nebo uzavřená podmnožina lokálně kompaktního prostoru je lokálně kompaktní. Všimneme si, že nikde lokálně kompaktní prostor nemá izolované body.

Budeme potřebovat ještě jednu charakterizaci nuldimenzionálních prostorů pomocí následující definice.

Definice 2.7. Silně nuldimenzionální prostory

Metrický prostor X se nazývá *silně nuldimenzionální*, jestliže má obojetnou bázi $\mathcal{B}$, které je spočetné sjednocením podsoustav $\mathcal{B}_n$ s následujícími vlastnostmi:

1. Každé $\mathcal{B}_n$ je disjunktí pokrytí X , tj. $\bigcup \mathcal{B}_n = X$, $B, B' \in \mathcal{B}_n, B \neq B' \Rightarrow B \cap B' = \emptyset$.
2. Pro každé $B \in \mathcal{B}_n$ je $B = \bigcup \{B' \in \mathcal{B}_{n+1}, B \subset B'\}$.

Vlastnost 2 je ekvivalentní formulaci

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{B}_{n+1}$ zjemnění pokrytí $\mathcal{B}_n$ (tj. každé $B \in \mathcal{B}_{n+1}$ je částí nějakého $B' \in \mathcal{B}_n$).

Snadné je ukázat, že Cantorova množina $\mathbb{C}$ je silně nuldimenzionální. Za $\mathcal{B}_1$ vezmeme průniky $[0, 1/3], [2/3, 1]$ s $\mathbb{C}$, za $\mathcal{B}_2$ vezmeme průniky $\mathbb{C}$ s $[0, 1/9], [2/9], [6/9, 7/9], [8/9, 1]$ a je zřejmé, jak pokračujeme dále.

Pro $\mathbb{Q}$ vezmeme např. $\mathcal{B}_1 = \{\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2} + k, \sqrt{2} + k + 1); k \in \mathbb{Z}\}$. Potom interval $(\sqrt{2} + k, \sqrt{2} + k + 1)$ rozdělíme v polovině na dva intervaly, a to $\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2} + k, \sqrt{2} + k + 1/2), \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2} + k + 1/2, \sqrt{2} + k + 1)$; všechny tyto poloviční intervaly tvoří $\mathcal{B}_2$, atd.

Podobný postup lze použít pro prostor $\mathbb{P}$ iracionálních čísel s rozdílem, že konce intervalů musí být racionální.

Prostor $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d_B)$ je také silně nuldimenzionální. Za $\mathcal{B}_1$ vezmeme množiny $B_k = \{x_n; x_1 = k\}, k \in \mathbb{N}$, za $\mathcal{B}_2$ množiny $B_{k,m} = \{x_n; x_1 = k, x_2 = m\}, k, m \in \mathbb{N}$, atd postupně přidáváme další čísla do indexů $B_{k_1, k_2, \dots, k_p}$.

Tyto příklady nejsou náhodné, protože všechny uvedené příklady jsou separabilní prostory.

Věta 2.8. Separabilní nuldimenzionální prostory

Separabilní nuldimenzionální prostory jsou silně nuldimenzionální.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že separabilní nuldimenzionální prostor X je nekonečný. Necht $\mathcal{C}$ je spočetná nuldimenzionální báze v X . Vezmeme otevřené pokrytí $\{B_1(x); x \in X\}$ a podle předchozí věty vybereme z $\mathcal{C}$ spočetné pokrytí $\{C_n\}$, kde každé C_n je částí některé koule $B_1(x)$. a má tedy průměr nejvýše 2. Pak definujeme $B_1 = C_1, B_{n+1} = C_n \setminus \bigcup_{i \leq n} C_i$ a dostáváme spočetné disjunktí pokrytí $\{B_n\}$ množiny X obojetnými množinami průměrů nejvýše 2. Označíme $\mathcal{B}_1 = \{B_n\}$.

Pro každé $B_n \in \mathcal{B}_1$ provedeme předchozí postup pro podprostor $B_n \subset X$ a koule $B_{1/2}(x)$ místo $B_1(x)$. Dostaneme obojetné disjunktí pokrytí $\{B_{n,k}; k \in \mathbb{N}\}$ množiny B_n množinami o průměry nejvýše 1. Označíme $\mathcal{B}_2 = \{B_{n,k}; n, k \in \mathbb{N}\}$.

Pokračujeme dále a získáme obojetné disjunktí pokrytí $\{B_{n,k,m}; m \in \mathbb{N}\}$ množiny $B_{n,k}$ množinami o průměru nejvýše 1/2 a pokrytí $\mathcal{B}_3 = \{B_{n,k,m}; n, k, m \in \mathbb{N}\}$, atd. Získaná posloupnost $\{\mathcal{B}_n\}$ je hledaná báze. $\square$

Předchozí tvrzení neplatí pro neseparabilní prostory.

Následuje základní tvrzení pro pozdější charakterizace. Říkáme, že metrický prostor (X, d) lze vnořit do metrického prostoru (Y, e) , jestliže existuje homeomorfismus $(X, d) \rightarrow (Y, d)$ (ten obvykle není surjekce).

Věta 2.9. Vnoření do $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d_B)$

Každý separabilní prostor lze vnořit do $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d_B)$.

Důkaz. Necht metrický prostor X je separabilní nuldimenzionální, takže podle předchozí věty je silně nuldimenzionální. Necht $\mathcal{B}$ je báze z definice 2.7. Neprázdných množin v každém $\mathcal{B}_n$ musí být nejvýše spočetné mnoho (separabilita), prázdné vynecháme. Očíslujeme množiny v $\mathcal{B}_1$ jako $\{B_1, B_2, \dots\}$. Každé B_n je pokryté nejvýše spočetné mnoha množinami $B \in \mathcal{B}_2$, které také očíslujeme jako $B_{n,1}, B_{n,2}, \dots$. Každá množina $B_{n,k}$ je podobně pokrytá množinami $B_{n,k,1}, B_{n,k,2}, \dots$ z $\mathcal{B}_3$, atd. Protože se jedná o disjunktí pokrytí, každý bod patří v $\mathcal{B}_n$ do jediné množiny $B_{k_1, \dots, k_n}$. Pro $m > n$ bude náležet do nějaké množiny $B_{k_1, \dots, k_n, \dots, k_m}$. Odtud vyplývá, že pro každý bod x existuje jediná posloupnost přirozených čísel $\{k_i\}$, že $x \in \bigcap \{B_{k_1, \dots, k_n}; n \in \mathbb{N}\}$. Protože $\mathcal{B}$ je báze, nemohou mít dva různé body stejné posloupnosti $\{k_i\}$.

Dostali jsme prostě zobrazení $\varphi : X \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Stačí dokázat, že je spojitě a inverzní $\varphi^{-1} : \varphi(X) \rightarrow X$ je též spojitě. To plyne ihned z rovnosti $\varphi(B_{k_1, \dots, k_n}) = \{\{y_i\} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; y_i = k_i, i \leq n\} \cap \varphi(X)$ a na pravé straně jsou množiny $\{\{y_i\} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; y_i = k_i, i \leq n\}$ prvky báze v $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d_B)$ (viz příklady po definici 2.7). $\square$