

1 Rozšiřování zobrazení

1.1 Rozšiřování obecných zobrazení

V celé této části o rozšiřování zobrazení předpokládáme, že definiční obor rozšiřované funkce je neprázdný (většinou značený jako A).

Definice 1.1. Rozšíření zobrazení

Je-li $A \subset X$ a $f : A \rightarrow Z$ nějaké zobrazení, říkáme, že $F : X \rightarrow Z$ je *rozšíření zobrazení f* , jestliže zúžení $F|_A$ se rovná f , tj. $F(x) = f(x)$ pro každé $x \in A$.

Definice 1.2. Retrakt

Podprostor A metrického prostoru X se nazývá jeho *retrakt*, jestliže existuje spojitě zobrazení $r : X \rightarrow A$ takové, že $r(x) = x$ pro každý bod $x \in A$. Zobrazení r se nazývá *retrakce*.

Příklady retraktů: jednobodové množiny, podmnožiny diskrétního prostoru, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\{0, 1\} \subset \mathbb{Q}$ (neplatí pro $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$), kompaktní konvexní podmnožiny euklidovských prostorů, písmeno Y v rovině. Každý retrakt v X je uzavřenou množinou v X .

Věta 1.3. Rozšíření z retraktu

Je-li $A \subset X$, pak každé spojitě zobrazení f na A do libovolného metrického prostoru lze spojitě rozšířit na X právě když je A retraktem X .

Chceme-li v předchozím tvrzení rozšiřovat stejnoměrně spojitá nebo hölderovská zobrazení f , musí být i retrakce r stejnoměrně spojitá nebo hölderovská.

Následující tvrzení neplatí pro spojitá zobrazení (Věta 1.8).

Věta 1.4. Rozšíření stejnoměrně spojitých zobrazení na uzávěr

Nechť A je hustý podprostor prostoru X a Z je úplný prostor. Pak každé stejnoměrně spojitě zobrazení $f : A \rightarrow Z$ lze rozšířit na stejnoměrně spojitě zobrazení $F : X \rightarrow Z$.

Pozorování 1.5. Stejnoměrná spojitost na husté části

Každé spojitě zobrazení, které je stejnoměrně spojitě na husté části svého definičního oboru, je stejnoměrně spojitě na celém prostoru.

1.2 Rozšiřování reálných funkcí

I když dokážeme rozšiřovací tvrzení jen pro reálné funkce, následující tvrzení říká, že dostaneme rozšiřovací věty i pro zobrazení do euklidovských prostorů.

Věta 1.6. Rozšíření do $\mathbb{R}^n$

Nechť každá spojitá (stejnoměrně spojitá) reálná funkce z podmnožiny A metrického prostoru X lze spojitě rozšířit na celé X . Potom každé spojitě (nebo stejnoměrně spojitě) zobrazení f z A do $\mathbb{R}^n$ lze spojitě (stejnoměrně spojitě, resp.) rozšířit na celé X .

Budeme potřebovat následující jednoduché, ale důležité tvrzení. Neplatí pro stejnoměrně spojitá zobrazení (např. graf funkce $1/x$ nelze stejnoměrně oddělit od osy x v rovině).

Lemma 1.7. Separace množin spojitou funkcí

Nechť P, Q jsou disjunktní uzavřené podmnožiny metrického prostoru (Z, ρ) . Pak existuje spojitá funkce $f : Z \rightarrow [0, 1]$, která má hodnoty 0 na P a 1 na Q .

Z předchozího lemma vyplývá omezení pro výběr množiny A vhodný pro rozšiřování spojitých zobrazení. Toto omezení neplatí pro stejnoměrně spojitá zobrazení (Věta 1.4).

Věta 1.8. Rozšíření spojitých zobrazení z neuzavřené množiny

Nechť A je podmnožina metrického prostoru X , která není uzavřená. Pak existuje spojitě zobrazení $f : A \rightarrow [0, 1]$, které nelze spojitě rozšířit na uzávěr množiny A , tedy ani na celé X .