

2 Charakterizace některých základních prostorů

2.1 Úvodní pojmy

K charakterizacím potřebujeme několik pojmů, které nebývají v základních přednáškách z metrických prostorů. Jsou to součiny spočetně mnoha metrických prostorů, topologicky úplné metrické prostory, nuldimenzionální a silně nuldimenzionální prostory.

Součiny konečně mnoha metrických prostorů jsou známe a jsou obdobou $\mathbb{R}^n$. Za vzdálenosti bodů $(x, y), (x', y')$ v $(X, d) \times (Y, e)$ se většinou berou $d(x, x') + e(y, y')$, $\sqrt{d^2(x, x') + e^2(y, y')}$, $\max\{d(x, x'), e(y, y')\}$. Všechny tyto metriky a jim podobné jsou ekvivalentní. Představa těchto součinů je jednoduchá. U součinu spočetně mnoha metrických prostorů je to složitější. Sice se použijí se obdobné operace jako u součinu konečně mnoha prostorů (jen musíme zajistit, že výsledek není ∞), ale představa a používání je složitější.

Definice 2.1. Součiny metrických prostorů

Nechť $(X_n, d_n), n \in \mathbb{N}$, jsou neprázdné metrické prostory. Definujeme součin množin $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ jako množinu funkcí $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup X_n$ s vlastností $f(n) \in X_n$. Metriku $d = \prod d_n$ na $\prod X_n$ definujeme následovně

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f(n), g(n))}{1 + d_n(f(n), g(n))}$$

Funkce $x/(1+x): [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ je konkávní, takže příslušný zlomek v definici d je metrikou. Místo tohoto zlomku lze brát $\min\{1, d_n\}$ nebo jen d_n , pokud jsou tyto metriky stejně omezené. Místo $1/2^n$ lze vzít jinou konvergentní řadu kladných čísel. Vždy dostaneme ekvivalentní metriku. Místo funkcí f lze brát posloupnosti $\{x_n\}$ pro $x_n \in X_n$. Představa je ale lepší pro funkce, kde si součin představíme jako křivý obdélník se základnou rovnou $\mathbb{N}$ a nad každým n vztýčíme X_n . Prvky součinu jsou pak grafy (křivé čáry nad $\mathbb{N}$). Základní koule (okolí) bodu f lze představit tak, že vezmeme $m \in \mathbb{N}$, kouli (okolí) okolo $f(n)$ pro každé $n \leq m$ a potom je koule (okolí) v součinu množina všech funkcí g procházejících v $X_n, n \leq m$, daným okolím a s libovolnými hodnotami v $X_n, n > m$.

Je důležité znát konvergenci v součinech. Snadno se ukáže podle popisu okolí, že $f_n \rightarrow f$ v součinu právě když $f_n(k) \rightarrow f(k)$ v X_k pro každé k . Poznamenáme, že pro metrické prostory nelze definovat součin nespočetně mnoha prostorů se zachováním uvedené konvergence.

U pojmů v metrických prostorech je důležité vědět, zda se zachovávají spočetnými součiny. Z uvedené konvergence posloupností plyne, že součin kompaktních prostorů je kompaktní a součin úplných prostorů je úplný.

Jako příklady lze uvést např. prostor posloupností přirozených čísel s Baireovou vlastností (viz dále), Cantorův prostor $2^{\mathbb{N}}$, Tichonovův kvádr $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ nebo Hilbertův kvádr $[0, 1/n]^{\mathbb{N}}$.

Definice 2.2. Topologicky úplné prostory

Metrický prostor se nazývá *topologicky úplný*, jestliže má ekvivalentní úplnou metriku.

Zřejmě je každý úplný (a tedy každý kompaktní) prostor topologicky úplný. Z popisu konvergence na součinu plyne, že součin ekvivalentních metrik je ekvivalentní metrika. Takže součin topologicky úplných prostorů je topologicky úplný.

Jednoduchým příkladem neúplného prostoru, který je topologicky, je otevřený omezený interval. Např. interval $(-\pi/2, \pi/2)$ není úplný v obvyklé metrice na $\mathbb{R}$, ale je úplný v ekvivalentní metrice $|\arctg x - \arctg y|$. Složitějším příkladem je prostor $\mathbb{P}$ iracionálních čísel (viz dále). Důležitost topologické úplnosti vyplývá i ze srovnání Cantorovy a Baireovy věty. Cantorova věta (průnik klesající posloupnosti uzavřených množin s klesajícími průměry k 0 je neprázdný) charakterizuje úplné prostory. Baireova věta (průnik spočetně mnoha otevřených hustých množin je hustý) je důsledek Cantorovy věty a platí tedy v úplných prostorech. Ale používá jen topologické pojmy, takže platí pro topologicky úplné prostory, což není pravda pro Cantorovu větu.

Příklad. Prostor $\mathbb{P}$ iracionálních čísel s obvyklou metrikou ρ je topologicky úplný.

Seřadíme racionální čísla do posloupnosti $\{r_n\}$. Pro $x \in \mathbb{P}$ je $|x - r_n|$ spojitá a nenulová na $\mathbb{P}$, takže $g_n = 1/|x - r_n|$ je spojitá funkce na $\mathbb{P}$. Potom $|g_n(x) - g_n(y)|$ je pseudometrika na $\mathbb{P}$ a tedy $d_n(x, y) = |x - y| + |g_n(x) - g_n(y)|$ je metrika na $\mathbb{P}$ (součet metriky a pseudometriky). Protože g je spojitá na $\mathbb{P}$ a $\rho \leq d_n$, jsou metriky ρ, d_n ekvivalentní. Nyní definujeme

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$$

a dokážeme, že d je ekvivalentní úplná metrika na $\mathbb{P}$. Necht' $\rho(x_m, x) \rightarrow 0$ (takže $d_n(x_m, x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ pro každé n) a $\varepsilon > 0$. Najdeme k , že $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon/2$. Dále najdeme m_0 , že pro $m > m_0$ je $d_i(x_m, x) < \varepsilon/2$ pro $i < k$. Dostáváme $d(x_m, x) < \varepsilon$. Necht' obráceně $d(x_m, x) \rightarrow 0$. Pak $\frac{d_n(x_m, x)}{1+d_n(x_m, x)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ pro každé n (protože $\frac{d_n(x_m, x)}{1+d_n(x_m, x)} \leq d(x_m, n)/2^n$) a tedy $d_n(x_m, x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ a tedy $\rho(x_m, x) \rightarrow 0$ (ekvivalence metrik).

Zbývá dokázat, že $(\mathbb{P}, d)$ je úplný prostor. Necht' $\{x_k\}$ je Cauchyovská posloupnost v $(\mathbb{P}, d)$. Ze stejného srovnání jako u předchozí konvergence je $\{x_k\}$ Cauchyovská v metrice $\frac{d_n(x, y)}{1+d_n(x, y)}$ a tedy i v metrice d_n (obě metriky jsou stejnoměrně ekvivalentní protože funkce $\frac{x}{1+x}$ je na $[0, \infty)$ konkávní a stejnoměrně spojitá. Protože $\rho \leq d_n$, je $\{x_k\}$ Cauchyovská v ρ , takže konverguje v $\mathbb{R}$ k nějakému $x \in \mathbb{R}$. Necht' $x = r_n$ pro nějaké n . Potom $g_n(x_k) \rightarrow \infty$ a existuje podposloupnost $\{x_{k_m}\}$, že $|g(x_{k_m}) - g(x_{k_l})| \geq 1$ pro $m \neq l$, takže $\{x_{k_m}\}$ není Cauchyovská v d_n a tedy ani v d , což je spor. Musí tedy být $x \in \mathbb{P}$ a protože $x_k \rightarrow x$ v ρ konverguje x_k k x i v d .

Předchozí důkaz lze použít pro tvrzení, že pokud je X průnikem spočetně mnoha otevřených množin G_n v úplném prostoru (Y, ρ) , je X topologicky úplný (stačí položit $g_n(x) = 1/d(x, G_n)$).

Definice 2.3. Nuldimenzionální prostory

Metrický prostor X se nazývá *nuldimenzionální*, jestliže pro každé $x \in X$ a $r > 0$ obsahuje koule $B_r(x)$ obojetnou (tj. současně uzavřenou i otevřenou) množinu obsahující x .

Je zřejmé, že nuldimenzionalita je topologický pojem, a tedy nezávisí na volbě ekvivalentní metriky. Jako příklady mohou sloužit prostor $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$, dále bude i prostor posloupností s Baireovou metrikou. V $\mathbb{Q}$ jsou přímo koule s racionálním poloměrem obojetné. V $\mathbb{P}$ není žádná koule obojetná. Euklidovské prostory nejsou nuldimenzionální.

Z popisu okolí v součinu dostaneme, že součiny nuldimenzionálních prostorů jsou opět nuldimenzionální. Takže Cantorův prostor je nuldimenzionální (to lze dokázat přímo v geometrickém popisu Cantorovy množiny na intervalu $[0, 1]$).

Důležitým příkladem nekonečných součinů a nuldimenzionálních prostorů je pro další postup tzv. Baireova metrika na prostoru posloupností přirozených čísel.

Příklad (Baireova metrika)

Necht' $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tj. množina všech posloupností na $\mathbb{N}$ s hodnotami v $\mathbb{N}$. Následující metrika d_B na X se nazývá *Baireova metrika*:

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \{x_n\} = \{y_n\} \\ \frac{1}{k} & \text{pro } \{x_n\} \neq \{y_n\}, \text{ kde } k \text{ je první index, že } x_k \neq y_k \end{cases}.$$

Z popisu okolí na součinech není těžké zjistit, že metrika d_B je ekvivalentní výše uvedeným metrikám na součinu $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Protože $\mathbb{N}$ je nuldimenzionální, je tedy i (X, d_B) nuldimenzionální.

Při zkoumání topologických vlastností metrických prostorů jsou často potřeba tzv. otevřené báze prostoru.

Definice 2.4. Otevřená báze

V metrickém prostoru X se soubor $\mathcal{B}$ otevřených množin nazývá *otevřená báze* v X , jestliže každá jeho neprázdná otevřená množina je sjednocením množin z $\mathcal{B}$.

Ekvivalentně: pro každou neprázdnou otevřenou množinu G a každý bod $x \in G$ existuje $B \in \mathcal{B}$, že $x \in B \subset G$. Takže např. množina koulí s poloměry $1/n, n \in \mathbb{N}$, je otevřená báze v X . V nuldimenzionálním prostoru je množina všech obojetných množin otevřenou bází. Bázi složenou z obojetných množin budeme nazývat *obojetnou bází*. Zřejmě je metrický prostor nuldimenzionální právě když má obojetnou bázi.

Obojetnou bází nyní použijeme pro zesílení nuldimenzionality. K jedné vlastnosti budeme potřebovat charakterizaci separabilních prostorů jako prostorů se spočetnou otevřenou bází.

Věta 2.5. Separabilní prostory

Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro metrický prostor (X, d) .

1. X je separabilní (tj. má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu).
2. Pro každé $r > 0$ je r -síť v (X, d) nejvýše spočetná.
3. X má nejvýše spočetnou otevřenou bázi.
4. Z každého otevřeného pokrytí X lze vybrat nejvýše spočetné pokrytí.

Důkaz. Ekvivalence jsou triviální pro konečné X a budeme dále předpokládat, že X je nekonečná množina. Snadná je ekvivalence $1 \Leftrightarrow 2$. Je-li A_n maximální nejspíše spočetná $1/n$ -sít, je $\bigcup A_n$ nejvýše spočetná hustá množina. Existuje-li nespočetná r -sít A , je soustava koulí $\{B_{r/2}(a), a \in A\}$ disjunktní. Pokud je S hustá v X , musí v každé uvedené kouli existovat bod $s_a \in S$ – tyto body jsou všechny různé a tedy S musí být nespočetná.

Nechť platí 1 a S je spočetná hustá množina v (X, d) . Za $\mathcal{B}$ vezmeme $\{B_{1/n}(s); s \in S\}$. To je spočetná množina a zbývá ukázat, že je to otevřená báze. Vezmeme otevřenou neprázdnou množinu G a nějaké $x \in G$. Tedy existuje $r > 0$, že $B_r(x) \subset G$. Protože S je hustá, existuje $s \in S, n \in \mathbb{N}$, že $d(x, s) < 1/n < r/3$. Pak $x \in B_{1/n}(s) \subset B_r(x) \subset G$. Platí tedy 3.

Dokážeme $3 \Rightarrow 4$. Nechť X má spočetnou bázi $\mathcal{B}$. Mějme otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru X . Pro každé $G \in \mathcal{G}$ existuje $\mathcal{B}_G \subset \mathcal{B}$, že $G = \bigcup \mathcal{B}_G$. Zřejmě je $\bigcup_G \mathcal{B}_G$ spočetné pokrytí X . Pro každé $B \in \bigcup_G \mathcal{B}_G$ vezmeme nějaké $G_B \in \mathcal{G}, B \subset G_B$. Potom je $\{G_B; B \in \bigcup_G \mathcal{B}_G\}$ hledané spočetné pokrytí X .

Dokážeme $4 \Rightarrow 2$. Nechť 2 neplatí a existuje $r > 0$ a nespočetná r -sít A . Potom $\{B_r(a); a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ je otevřené pokrytí X , z kterého nelze vybrat spočetné pokrytí. $\square$

Všimneme si, že v kroku $3 \Rightarrow 4$ jsme ukázali i to, že z každého otevřeného pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru X se spočetnou bází $\mathcal{B}$ lze vybrat podsoustavu $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ pokrývající X a ke každému $B \in \mathcal{B}'$ existuje $G \in \mathcal{G}, G \supset B$.