

### 3 Brouwerova věta o pevném bodě

#### 3.1 Pevné body

##### Definice 3.1. Pevný bod zobrazení

Bod  $x_0 \in X$  je *pevným bodem* zobrazení  $f : X \rightarrow X$ , jestliže  $f(x_0) = x_0$ .

Je-li  $(X, d)$  kompaktní a  $f : X \rightarrow X$  spojitý, má  $f$  pevný bod, pokud pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $x$ , že  $d(x, f(x)) < \varepsilon$ .

##### Věta 3.2. Banachova věta o pevném bodě, 1922

*V úplném metrickém prostoru má každá kontrakce jediný pevný bod.*

V kompaktním prostoru stačí předpokládat  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$  pro  $x \neq y$  a požadavek kompaktnosti nelze zrušit.

Banachova věta má mnoho modifikací, které probereme později.

##### Definice 3.3. Vlastnost pevného bodu (FPP)

Říkáme, že metrický prostor  $X$  má *vlastnost pevného bodu*, zkratkou FPP (z anglického fixed point property), jestliže každé spojitý zobrazení  $f : X \rightarrow X$  má pevný bod.

Triviálně, diskretní prostor má FPP právě když je jednobodový. Žádná  $n$ -dimenzionální sféra (hranice  $n + 1$ -dimenzionální koule,  $n \in \mathbb{N}$ ) nemá FPP, protože zobrazení  $f(x) = -x$  na sféře nemá pevný bod.

##### Pozorování 3.4. Bolzanova věta a pevný bod na intervalu

*Kompaktní intervaly v  $\mathbb{R}$  mají FPP.*

##### Věta 3.5. Zachovávání FPP retrakty

*Každý retracts prostoru s FPP má také FPP.*

Odtud plyne, že vlastnost FPP je topologická, tj. má-li  $X$  FPP, má tuto vlastnost každý prostor homeomorfní s  $X$ .

Hlavním výsledkem této třetí části je Brouwerova věta o pevném bodě, kterou dokážeme pomocí kombinatorické větě pro konečné množiny, tzv. kombinatorické topologie.

##### Věta 3.6. Brouwerova věta, 1910

*Každá kompaktní konvexní množina v  $\mathbb{R}^n$  má FPP.*

#### 3.2 Základy kombinatorické topologie

Říkáme, že body  $\{a_0, \dots, a_n\}$ ,  $n \geq 0$ , jsou *afinně nezávislé*, jestliže vektory  $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  jsou lineárně nezávislé, tj. lineární prostor určený body  $\{a_0, \dots, a_n\}$  má dimenzi  $n$ .

##### Definice 3.7. Simplex

*Simplex* ( $n$ -dimenzionální) v euklidovském prostoru je konvexní obal  $n + 1$  afinně nezávislých bodů. Simplex  $S$  určený body  $\{a_0, \dots, a_n\}$  značíme  $(a_0, \dots, a_n)$  a body  $a_i$  se nazývají vrcholy simplexu  $S$ .

Každý bod  $x$  simplexu  $(a_0, \dots, a_n)$  má jednoznačné vyjádření pomocí tzv. konvexní kombinace:

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i, \quad \text{kde } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0.$$

Čísla  $\lambda_i$  se nazývají *barycentrické souřadnice* bodu  $x$ . Snadno se zjistí, že funkce přiřazující bodu  $x$  jeho  $i$ -tou barycentrickou souřadnici, jsou na simplexu spojitý.

Protože každá neprázdná podmnožina afinně nezávislých bodů je opět afinně nezávislá, je konvexní obal podmnožiny vrcholů simplexu  $S$  opět simplex, který se nazývá *stranou simplexu  $S$* . Vrcholy simplexu jsou jeho stranami, simplex je svou stranou. Jednodimenzionální strany se nazývají *hrany*.

### Definice 3.8. Komplex

Konečná množina simplexů  $\mathcal{K}$  v euklidovském prostoru se nazývá *komplex*, splňuje-li následující dvě podmínky:

- Je-li  $S \in \mathcal{K}$ , náleží i každá jeho strana do  $\mathcal{K}$ .
- Průnik dvou simplexů z  $\mathcal{K}$  je buď prázdný nebo jejich strana.

Dimenze komplexu je maximum z dimenzí jeho simplexů.

### Definice 3.9. Rozdělení simplexu a komplexu

Rozdělením simplexu  $S$  rozumíme komplex takový, že sjednocení všech jeho simplexů je právě  $S$ . Rozdělení komplexu  $\mathcal{K}$  je komplex, který je sjednocením rozdělení jednotlivých simplexů z  $\mathcal{K}$ .

Speciálním rozdělením je tzv. *barycentrické rozdělení*  $\mathcal{B}$  simplexu  $S$ . Těžištěm simplexu  $(a_0, \dots, a_n)$  je bod  $\sum_{i=0}^n a_i / (n+1)$ . Pro každou stranu  $T$  simplexu  $S$  označíme  $t_T$  těžiště množiny  $T$ . Různé body  $t_{T_0}, \dots, t_{T_k}$  tvoří simplex komplexu  $\mathcal{B}$ , jestliže  $T_i$  je vlastní stranou  $T_{i+1}$  pro každé  $i = 0, \dots, k-1$ . Snadno se zjistí, že pokud je  $d$  diametr  $n$ -dimenzionálního simplexu  $S$  (tj. nejdelší vzdálenost mezi dvěma jeho vrcholy), je diametr každého simplexu v barycentrickém rozdělení nejvýše  $\frac{n}{n+1}d$ . Uděláme-li v komplexu  $\mathcal{K}$  barycentrické rozdělení každého jeho simplexu, dostaneme tzv. barycentrické rozdělení komplexu  $\mathcal{K}$ , což je komplex označený např. jako  $\mathcal{K}_1$ . Protože  $\mathcal{K}_1$  je komplex, můžeme sestavit jeho barycentrické rozdělení, které označíme  $\mathcal{K}_2$ . Můžeme takto pokračovat a dostávat postupně další barycentrická rozdělení. Smyslem tohoto postupu je pro libovolné  $r > 0$  získat takové rozdělení  $\mathcal{K}'$  původního komplexu  $\mathcal{K}$ , že diametr libovolného simplexu v  $\mathcal{K}'$  je menší než  $r$  (to lze, protože posloupnost  $(\frac{n}{n+1})^k$  konverguje k 0 pro  $k \rightarrow \infty$ ).

Vezmeme simplex  $S$  a nějaké jeho rozdělení  $\mathcal{K}$ . Každý vrchol  $v$  rozdělení  $\mathcal{K}$  leží v nejmenší straně  $T$  simplexu  $S$ . Z vrcholů  $T$  vybereme jeden a označíme ho  $h(v)$ . Takovéto zobrazení vrcholů  $\mathcal{K}$  do vrcholů simplexu  $S$  se nazývá *Spernerovo zobrazení*. Toto zobrazení je tzv. simplicialní (tj., převádí vrcholy simplexu na vrcholy simplexu), ale ne každé simplicialní zobrazení  $\mathcal{K} \rightarrow S$  je Spernerovo.

### Věta 3.10. Spernerovo lemma, 1928

*Nechť  $\mathcal{K}$  je rozdělení simplexu  $S$  a  $h : \mathcal{K} \rightarrow S$  je Spernerovo zobrazení. Potom existuje simplex v  $\mathcal{K}$ , který se zobrazí na  $S$ .*