

Řešení příkladů ze cvičení Kalkulus 2, 15.10.2025

Lineární rovnice 2. řádu

U prvních 4 rovnic uvedeme jen charakteristickou rovnici, kořeny a fundamentální systém řešení, vše je na $\mathbb{R}$.

$$y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, -2 \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \Rightarrow y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$$

$$y'' + 2y' - 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i \Rightarrow y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$y^{(4)} - 2y'' = 0 \Rightarrow \lambda^4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} \pm \sqrt{2} \Rightarrow y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x\sqrt{2}} + C_4 e^{-x\sqrt{2}}$$

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Řešení homogenní rovnice je na $\mathbb{R}$, ale zadaná rovnice má smysl jen na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$.

Variace konstant:

$$C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0, C_1' \cos x + C_2'(-\sin x) = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow C_1' = 1, C_2' = -\operatorname{tg} x \Rightarrow C_1 = x, C_2 = \log |\cos x|,$$

takže $y_p = x \sin x + \cos x \log |\cos x|$.

Závěr: Obecné řešení rovnice $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ je $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x \sin x + \cos x \log |\cos x|$ na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$.

Ověřte, že $\{x^2, x^3\}$ je fundamentální systém rovnice $y'' - \frac{4y'}{x} + \frac{6y}{x^2} = 3x$ a najděte obecné řešení této rovnice.

Dosazením y^2 a y^3 do rovnice zjistíme, že jsou tyto funkce řešením příslušné homogenní rovnice na $(-\infty, 0), (0, \infty)$. Musíme zjistit, že jsou lineárně nezávislé, což nám dá nenulovost Wronského determinantu:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0 \text{ na intervalech } (-\infty, 0), (0, \infty).$$

Obecné řešení homogenní rovnice je tedy $y_h = C_1 x^2 + C_2 x^3$. Zbývá najít partikulární řešení pomocí variace konstant.

$$\left. \begin{array}{l} C_1' x^2 + C_2' x^3 = 0 \\ C_1' 2x + C_2' 3x^2 = 3x \end{array} \right\} \Rightarrow C_1' = -3, C_2' = \frac{3}{x} \Rightarrow C_1 = -3x, C_2 = 3 \log |x|$$

Dostáváme partikulární řešení $y_p = -3x^3 + 3x^3 \log |x|$ na $(-\infty, 0), (0, \infty)$. Na těchto intervalech je tedy obecné řešení zadané rovnice $y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + 3x^3 \log |x|$ (část $-3x^3$ z partikulárního řešení jsme přidali k části x^3 v řešení homogenní rovnice).

Vyřešte ODR $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $\lambda = 2$. Pro použití metody neurčitých koeficientů máme (viz Poznámky) $a = 2, k = 0, b = 0$. Protože $a + ib = 2$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice, je $r = 2$. Hledáme tedy partikulární řešení ve tvaru $y = Ax^2 e^{2x}$. Dosadíme ho do rovnice a dostaneme

$$e^{2x}((2A + 8Ax + 4Ax^2) - 4(2Ax + 2Ax^2) + 4Ax^2) = e^{2x} \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Dostáváme partikulární řešení $y_p = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$ a obecné řešení zadané rovnice $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2)$ na $\mathbb{R}$.