Řešení příkladů ze cvičení Kalkulus 2, 1.10.2025

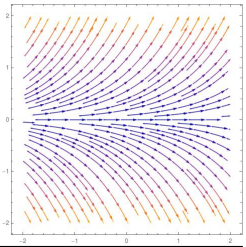
Dále používaná funkce $f(x, y)$ pochází z rovnice $y' = f(x, y)$. V Poznámkách jsou různé vysvětlivky.

Najděte všechna maximální řešení rovnice $\boldsymbol{y' = ky}$, $k \in \mathbb{R}$.

1. Rovnice $y' = ky, k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ má smysl na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x, y) = ky$ je spojitá na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, takže každým bodem roviny prochází jediné řešení.
3. Rovnice má stacionární řešení $y = 0$.
4. Za předpokladu $y \neq 0$ dostaneme formální integrací
$$\int \frac{\mathrm{dy}}{y} = \int \mathrm{dx} \quad \Rightarrow \log|y| = kx + C, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow |y| = e^C e^{kx}, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$$
5. V poslední položce postupu řešení uděláme diskuzi získaných funkcí $t(x)$ vzhledem k podmínkám z předchozích položek. Získali jsme všechna řešení? Jsou naše řešení maximální?.

V položkách 1-4 jsme žádné podmínky nedostali, máme řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$ a pro $y \neq 0$ máme $|y| = e^C e^{kx}, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Označíme $C_1 = e^C$, takže $C_1 > 0$. Je-li $y > 0$, máme $y = C_1 e^{kx}$, je-li $y < 0$, máme $y = -C_1 e^{kx}$. Protože vyřešená rovnost má smysl i pro $y = 0$, máme $y = 0 = 0e^{kx}$. Když to dáme dohromady, dostaneme obecné řešení $y = Ke^{kx}, K \in \mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Tato řešení jsou maximální a jiná nejsou, protože každým bodem roviny prochází právě jedno řešení. Pokud chcete jednoznačnost ověřit, stačí zjistit, že pro každé $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ existuje jediné C vyhovující rovnici $y_0 = Ce^{kx_0}$, což je zřejmé.



Závěr: rovnice $y' = ky$ má na $\mathbb{R}$ obecné řešení $y == Ke^{kx}, K \in \mathbb{R}$. Žádná jiná řešení nemá, každým bodem roviny prochází jediné řešení.

Najděte všechna maximální řešení rovnice $\boldsymbol{y' = 2\sqrt{y}}$

1. Rovnice má smysl na $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.
2. Funkce $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ je spojitá na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, takže každým bodem této množiny prochází jediné řešení.
3. Rovnice má stacionární maximální řešení $y = 0$.
4. Za předpokladu $y \neq 0$ dostaneme formální integrací
$$\int \frac{\mathrm{dy}}{2\sqrt{y}} = \int \mathrm{dx} \quad \Rightarrow \sqrt{y} = x + C, x \in (-C, \infty), C \in \mathbb{R}\,, \quad \text{takže } y = (x + C)^2, x \in (-C, \infty), C \in \mathbb{R}\,.$$

Kdybychom po výrazu $\sqrt{y} = x + C$ zapomněli dát interval pro x, dostali bychom řešení $y = (x + C)^2$ a tato rovnost platí na $\mathbb{R}$. Klesající část této paraboly však nemůže být řešením (např. ze zadání rovnice plyne $y' \geq 0$, takže řešení nemůže být nikde klesající).

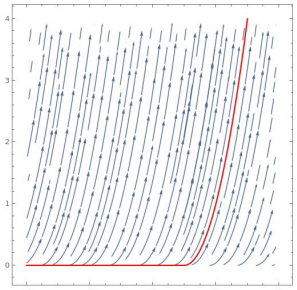
Vidíme, že řešení $y = 0$ je singulární a nedostaneme ho ze získaného obecného řešení pro žádné C.

Řešení $y = (x + C)^2$ není řešením na celém $\mathbb{R}$, kde má rovnice smysl. Dá se prodloužit doleva za bod $x = -C$? Prodloužit to nelze, pokud má řešení v daném bodě nevlastní limitu. To v našem případě není a řešení má v bodě $x = -C$ zprava limitu rovnou 0. Máme jediné řešení, které má v $x = -C$ zleva limitu 0 a to je řešení $y = 0$. Podle věty o lepení z přednášky lze tedy řešení $y = (x + C)$ na $(-C, \infty)$ a řešení $y = 0$ na $(-\infty, -C)$ v bodě $x = -C$ slepit a dostaneme maximální řešení rovnice

Závěr: rovnice $y' = 2\sqrt{y}$ má za všechna maximální řešení funkci $y = 0$ a funkce tvaru (pro $C \in \mathbb{R}$)

$$y = \begin{cases} 0 \text{ pro } x \in (-\infty, -C) \\ (x+C)^2 \text{ pro } x \in [-C, +\infty) \end{cases}$$

Všemi body $(x_0, 0)$, prochází nekonečně mnoho řešení, body $(x_0, y_0), y_0 > 0$, prochází jediné řešení. Jiná řešení nejsou.



Najděte všechna maximální řešení rovnice $\boldsymbol{yy' = \frac{1-2x}{y}}$

1. Rovnice má smysl na $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ a na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.
2. Funkce $f(x, y) = \frac{1-2x}{y^2}$ je spojitá na $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ a na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, takže každým bodem této množiny prochází jediné řešení.
3. Rovnice nemá stacionární řešení.
4. Za předpokladu $y \neq 0$ dostaneme formální integrací

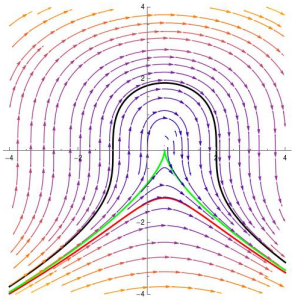
$$\int y^3 \,\mathrm{dy} = \int (1-2x)\,\mathrm{dx} \Rightarrow \frac{y^3}{3} = x - x^2 + C, x - x^2 + C \neq 0, C \in \mathbb{R}, \Rightarrow y = \sqrt[3]{3(x - x^2 + C)}, \text{ pro } x - x^2 + C \neq 0\,.$$

Musíme probrat podmínku $x = x^2 + C \neq 0$. Kořeny rovnice $x = x^2 + C = 0$ jsou $x_{1,2} = -(-1 \pm \sqrt{1 + 4C})/2$, takže dostáváme řešení

$$y = \sqrt[3]{3(x - x^2 + C)} \begin{cases} \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } C < -\frac{1}{4}, \\ \text{na } (-\infty, (1 - \sqrt{1+4C})/2), (1 - \sqrt{1+4C})/2, 1 + \sqrt{1+4C})/2), (1 + \sqrt{1+4C})/2, \infty) \text{ pro } C \geq -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Poslední interval je prázdný pro $C = -1/4$. Opět lze snadno zjistit, že jsme dostali všechna řešení a to jednoznačná pro $y \neq 0$. Osou x neprochází žádné řešení (ta uvedená mají v bodech $(x, 0)$ nevlastní derivace a nedají se do těchto bodů prodloužit).

Jsou uvedená řešení maximální? Jedná se o možnost slepení řešení v bodech $x_1 = (1 - \sqrt{1 + 4C})/2, x_2 = (1 + \sqrt{1 + 4C})/2$ pro $C \geq -1/4$. Pro použití věty o lepení nám chybí splnění předpokladu, že f je spojitá v bodech $(x_1, 0), (x_2, 0)$. Snadno spočteme derivaci funkce $\sqrt[3]{3(x - x^2 + C)}$ v bodech x_1, x_2: vyjdou nevlastní limity. Odtud vyplývá, že uvedená řešení jsou maximální.



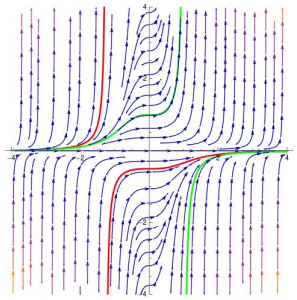
Závěr: rovnice $yy' = \frac{1-2x}{y}$ má za všechna maximální řešení výše uvedená řešení na intervalech závisejících na hodnotě C. Body přímky $y = 0$ neprochází žádné řešení, ostatními body roviny prochází jediné řešení.
Ve směrovém poli je černý graf řešení pro $C > 1/4$, zelený pro $C = 1/4$ a červený pro $C < -1/4$.

Najděte všechna maximální řešení rovnice $\boldsymbol{y' = 3x^2y^2}$

Nebudeme nyní uvedený postup očíslovávat. Rovnice má smysl na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, funkce $f(x, y) = 3x^2y^2$ je spojitá všude, existuje maximální stacionární řešení $y = 0$. Pro $y \neq 0$ formálně zintegrujeme:

$$\int \frac{\mathrm{dy}}{y^2} = \int 3x^2\,\mathrm{dx} \quad \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^3 + C na \mathbb{R} \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{x^3 + C} \text{ pro } x \neq = -\sqrt[3]{C}\,.$$

Získaná řešení $y = -\frac{1}{x^3+C}, C \in \mathbb{R}$ jsou na intervalech $(-\infty, -\sqrt[3]{C})$ a $(-\sqrt[3]{C}, \infty)$.
Do bodu $x = -\sqrt[3]{C}$ se nedají prodloužit protože v něm mají nevlastní limity.



Závěr: rovnice $y' = 3x^2y^2$ má za všechna maximální řešení funkci $y = 0$ na $\mathbb{R}$ a funkci $y = -\frac{1}{x^3+C}, C \in \mathbb{R}$ na intervalech $(-\infty, -\sqrt[3]{C}$ a $(-\sqrt[3]{C}, \infty)$.
Každým bodem roviny prochází jediné řešení.
Ve směrovém poli je červený graf řešení pro $C = 2$ z zelený pro $C = -1$.

Najděte všechna maximální řešení rovnice $\boldsymbol{y^2 - x^2 y' = xyy'}$ (s homogenní funkcí, jde o těžší příklad).

Rovnice má smysl pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a konstantní funkce $y = 0$ je maximálním řešením rovnice na $\mathbb{R}$. Základní tvar rovnice je $y' = \frac{y^2}{x^2+xy}$ pro $x \neq 0, y \neq -x$. Přímka $y = -x$ není řešením rovnice, přímkou $x = 0$ může procházet řešení jedině počátkem. Kromě bodů na ose y a přímce $y = -x$ tedy prochází každým bodem roviny jediné řešení rovnice.
Funkce $f(x, y)$ je homogenní. Budeme pokračovat za předpokladu $x \neq 0, y \neq -x$ substitucí $y(x) = u(x)x, u \neq -1$ (budeme psát jen $y = ux$).

$$y' = u'x + u \quad \Rightarrow \quad u^2x^2 - x^2(u'x + u) = x\,ux\,(u'x + u) \quad \Rightarrow \quad x(u + 1)u' = -u\,.$$

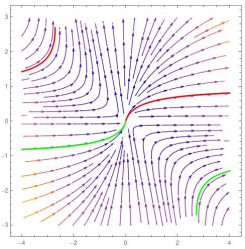
Dostali jsme rovnici se separovanými proměnnými, která má stacionární řešení $u = 0$ a pro $u \neq 0, x \neq 0$:

$$\int \frac{u+1}{u}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} \quad \Rightarrow \quad u + \log|u| = -\log|x| + C \quad \Rightarrow \quad xue^u = K, K \in \mathbb{R} \text{ pro } x \neq 0, u \neq -1\,.$$

Za u dáme zpátky $u = y/x$ a dostaneme $ye^{(y/x)} = K, K \in \mathbb{R}$, pro $x \neq 0, y \neq -x, K \neq 0$ a na $\mathbb{R}$ pro $K = 0$. Dostáváme všechna řešení, protože z rovnosti $K = y_0 e^{y_0/x_0}$ vidíme, že každým bodem $(x_0, y_0), x_0 \neq 0$ prochází řešení. Všimneme si, že y, K mají stejná znaménka. Otázkou je maximalita řešení $y(x)$ a intervaly, na kterých jsou řešení $y(x)$ definována. Problém je v tom, že řešení je dáno v implicitním tvaru a nedovedeme rovnost vyřešit pro y.

Vrátíme se k rovnosti $ue^u = K/x, x \neq 0$. Nemusíme uvažovat $y = 0$, takže předpokládáme $K \neq 0$. Funkce ue^u klesá od 0 k $-1/e$ na $(-\infty, -1)$ a roste od $-1/e$ do $+\infty$ na $(-1, \infty)$, na těchto intervalech má inverzní funkce φ, resp. ψ. Přechodem k y dostáváme $y = x\varphi^{-1}(K/x)$ pro $K/x \in (-1/e, 0)$ (tj. $x \in (-Ke, \infty)$ pro $K < 0$, $x \in (-\infty, -Ke)$ pro $K > 0$) a $y = x\psi^{-1}(K/x)$ pro $K/x \in (-1/e, \infty)$ (tj. $x \in (-Ke, 0) \cup (0, \infty)$ pro $K > 0$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, -Ke)$ pro $K < 0$). Posledně uvedené intervaly $(-Ke, 0), (0, -Ke)$ nelze použít, protože potom mají K, y rozdílná znaménka.

Zbývá problém, zda se obě poslední možnosti dají slepit v bodě $x = 0$ (rovnice má v tomto bodě smysl, i když funkce f není v tomto bodě definovaná). Nelze použít větu o lepení, ale stačí spočítat limity zprava funkce i derivace funkce $y = x\psi^{-1}(K/x)$ pro $K > 0, x > 0$ a zleva $y = x\psi^{-1}(L/x)$ pro $L < 0, x < 0$. Pokud jsou vlastní a rovnají se, slepit se obě funkce dají. Obě funkce mají jednostranné limity rovné 0. S derivacemi je to horší. Zatím nemáte derivace implicitní funkce, ale dá se použít derivace inverzní funkce $x = \frac{y}{\log((K/y))}$. Její jednostranné limity derivace v 0 pro příslušná y, K se rovnají 0, takže limity derivace původní funkce y jsou nevlastní. Slepit se tedy zkoumané funkce nedají. Viz Poznámky, jak se dá postupovat jinak, v tomto případě jednodušeji.



Závěr: rovnice $y^2 - x^2y' = xyy'$ má řešení v implicitním tvaru $ye^{(y/x)} = K$, $K \in \mathbb{R}$ na intervalech (pro x) $\mathbb{R}$ pro $K = 0$, $(-\infty, -Ke)$ a $(0, \infty)$ pro $K > 0$, $(-\infty, 0)$ a $(-Ke, \infty)$ pro $K < 0$. Na ose x prochází řešení jen počátkem (nekonečně mnoho), ostatními body prochází lokálně jediné řešení.
Na obrázku jsou obě řešení pro $K = 1$ (červené) a obě pro $K = -1$ (zelené).