

Stejněměrná konvergence řad.

Na rozdíl od posloupností existuje u řad jediná, ale nepraktická, charakterizace stejnoměrné konvergence, a to Cauchyova podmínka. Ta se hodí v důkazech, málokdy k ověřování stejnoměrné konvergence konkrétních řad. Existují nutné i postačující podmínky. Nutnou podmínkou stejnoměrné konvergence řady $\sum f_n$ na intervalu J je stejnoměrná konvergence $f_n \rightarrow 0$ na J . Většinou ale najdeme interval, na kterém $\sum f_n$ konverguje bodově k 0 a na něm zkusíme postačující podmínky pro stejnoměrnou konvergenci.

Nejjednodušší postačující podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci řady je Weierstrassovo kritérium, tj. nalezení konvergentní řady čísel $\sum c_n$, kde $c_n \geq |f_n|$ na J od nějakého n_0 počínaje. Obecnější podmínkou je nalezení jednodušších funkcí g_n , že $\sum g_n$ stejnoměrně konverguje a $g_n \geq |f_n|$ na J od nějakého n_0 počínaje.

Použití předchozích kritérií je vidět na probíraných příkladech. Pokud a, b jsou vlastní krajní body intervalu J a $\sum f_n$ na J bodově konverguje, a např. u krajního bodu a mají funkce oscilaci větší než nějaké kladné číslo, nebo konvergují k nevlastnímu číslu, nemůže řada těchto funkcí u tohoto krajního bodu stejnoměrně konvergovat. Často se stává, že potom řada konverguje na intervalech s levým krajním bodem $c > a$.

Použití stejnoměrně konvergentních řad

Situace, že stejnoměrně konvergentní řada $\sum f_n$ nemusí mít stejnoměrně konvergentní řadu derivací $\sum f'_n$, se využívá ke konstrukcím spojitě funkce, která nemá derivaci v žádném bodě. První takovou funkci pomocí řad sestrojil K. Weierstrass v r. 1872: $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, kde byly podmínky pro a, b později upraveny na $0 < a < 1, ab > 1$. Podobných řad bylo od doby Weierstrasse popsáno hodně (např. M. Lerch ($\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n! \pi x)/n!$). Jako první sestrojil takovou funkci B. Bolzano, více než 40 let před Weierstrassem, pomocí limity posloupnosti funkcí.

Dirichletova funkce

Dirichletova funkce

$$f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro racionální } x \\ 0 & \text{pro iracionální } x \end{cases}$$

je bodovou limitou posloupnosti $\{F_n\}_n$, kde každé F_n je bodovou limitou funkcí $\{f_{n,m}\}_m$, kde $f_{n,m} = \cos^m(n! \pi x)$, tj.

$$f_D(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \cos^m(n! \pi x) \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Je-li x iracionální, je pro dané n vždy $|\cos(n! \pi x)| < 1$, takže vnitřní limita podle m je pro každé n rovna 0, takže posloupnost $\{F_n(x)\}_n$ je konstantní s hodnotou 0. Je-li $x = p/q$ racionální, je pro $n \geq 2q$ číslo $n! \pi x$ sudým násobkem čísla π a tedy $\cos(n! \pi x) = 1$; posloupnost $\{F_n(x)\}_n$ je tedy od určitého n_0 konstantní s hodnotou 1.

Je dokázáno, že Dirichletova funkce není bodovou limitou nějaké posloupnosti $\{f_n\}_n$ spojitých funkcí.

Zkuste přehodit pořadí n, m v uvedené limitě.