

## Poznámky k soustavám ODR a stejnoměrné konvergenci.

### Soustavy ODR

Podíváme se jen na soustavy dvou lineárních rovnic s řešením pro rovnice s konstantními koeficienty. Navíc uvedeme jen postup, který převádí tuto soustavu na lineární rovnici 2.řádu. Postup vhodnější pro soustavy více rovnic používá matice, protože uvedené soustavy lze pomocí matic napsat a počítat s nimi jednodušeji (funkce  $x, y$  jsou funkce proměnné  $t$ ):

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + q_1(t) \\ y' &= c_1x + d_1y + q_2(t) \end{aligned} \Rightarrow \mathbb{X}' = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{Q} \quad \text{kde } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$$

Převedeme soustavu na rovnici 2.řádu pro  $y$ . Můžeme předpokládat  $c_1 \neq 0$ , protože jinak je druhá rovnice pro  $y'$  rovnicí 1.řádu pro  $y$ , tu vypočteme a dosadíme řešení pro  $y$  do první rovnice a řešením získáme  $x$ .

Zderivujeme druhou rovnici, dosadíme za  $x'$  pravou stranu první rovnice a za  $x$  výraz vypočtený z druhé rovnice:

$$y'' = c_1x' + d_1y' + q_2' = c_1(a_1x + b_1y + q_1) + d_1y' + q_2' = c_1\left(\frac{a_1}{c_1}(y' - d_1y - q_2) + b_1y + q_1\right) + d_1y' + q_2'$$

Dostali jsme lineární rovnici 2.řádu pro  $y$  s konstantními koeficienty. Jejím vyřešením získáme  $y$ . Nyní máme dvě možnosti. Vypočítat  $x$  z druhé rovnice (pak musíme zderivovat  $y$ ) nebo dosadit  $y$  do první rovnice a vypočítat  $x$  z lineární rovnice 1.řádu. První způsob bývá jednodušší.

### Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Máme posloupnost funkcí  $\{f_n\}$  na intervalu  $J$ , která bodově konverguje k funkci  $f$ , tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  pro každé  $x \in J$ . Máme zjistit, zda na  $J$  konverguje stejnoměrně. Kromě přímého ověření stejnoměrné konvergence podle definice máme jedinou pomůcku:

$$f_n \Rightarrow f \text{ právě když } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in J\} = 0.$$

Existuje ještě jedna charakterizace ve speciálním případě, kterou asi nebudete probírat:

$$f_n, f \text{ spojité na } [a, b], f_n \rightarrow f \text{ monotónně, pak } f_n \Rightarrow f.$$

To je tzv. Diniho věta. Protože stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá, tato věta je opravdu charakterizace: Pokud spojitá funkce  $f_n$  konvergují na  $[a, b]$  monotónně k  $f$ , pak  $f_n \Rightarrow f$  právě když je  $f$  spojitá. Uzavřenost a omezenost intervalu je podstatná.

Pokud najdeme posloupnost  $\{h_n\}$  konvergující k 0 a takovou, že  $h_n \geq |f_n - f|$  na  $J$ , pak  $f_n \Rightarrow f$ .

Říkáme, že  $f_n$  konvergují k  $f$  na  $J$  *lokálně stejnoměrně*, jestliže pro každý bod  $x \in J$  existuje  $\delta > 0$ , že  $f_n \Rightarrow f$  na  $J \cap (x - \delta, x + \delta)$ . Znamená to, že  $f_n \Rightarrow f$  na každém uzavřeném omezeném intervalu obsaženém v  $J$ .