

Poznámky pro ODR

Používáme zkratku ODR pro obyčejné diferenciální rovnice (ODE v angličtině). Ještě se používá zkratka PDR (resp. PDE) pro parciální diferenciální rovnice pro rovnice s parciálními derivacemi funkcí více proměnných.

Existenční věta pro ODR 1.řádu.

Na přednáškách se často probírají existenční věty pro řešení ODR jen pro rovnice speciálního typu, např. se separovanými proměnnými, lineární a další. Tyto věty však nelze použít pro další typy rovnic, které se na uvedené typy dají použít, např. rovnice s homogenní funkcí, Bernoulliovy rovnice atd. Uvedeme nyní obecnou větu pro existenci a jednoznačnost řešení ODR 1.řádu. Ta je jednoduchá, ale je problém ji nyní dokázat, protože se potřebuje znalosti, které se probírají později. Tvrzení uvádíme ve tvaru, v jakém se pro jednodušší ODR používá (jsou obecnější formulace).

Existenční věta. *Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá na otevřeném obdélníku $J \times I$, pak každým bodem tohoto obdélníku prochází řešení rovnice $y' = f(x, y)$.*

Je-li navíc i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ spojitá na $J \times I$, pak toto řešení je jediné.

To znamená, že pro každé $(x_0, y_0) \in J \times I$ existuje funkce $y(x)$, definovaná na nějakém otevřeném intervalu $U \subset J$ obsahujícím bod x_0 , s hodnotami v I a taková, že $y(x_0) = y_0$ a $y'(x) = f(x, y(x))$ pro každé $x \in U$. Věta je lokálního charakteru, tj. uvádí existenci řešení jen v nějakém okolí daného bodu. Získané lokální řešení můžeme však prodloužovat, až získáme největší možný podinterval v J , na kterém takové řešení y existuje (tzv. maximální řešení). Jednoznačnost znamená, že na uvedeném okolí U je funkce $y(x)$ s uvedenými vlastnostmi jediná. To ale neznamená, že neexistuje jiné řešení $z(x)$, které se na U shoduje s $y(x)$, ale mimo U je v některých bodech z J různé. Vzhledem k uvedenému lokálnímu charakteru se různé modifikace existenční věty formulují jen pro okolí bodu (x_0, y_0) , kterým má řešení probíhat.

Záměna proměnných

V posledním příkladě rovnice $y^2 - x^2 y' = xy y'$ s homogenní funkcí byla diskuse o řešení složitá, protože řešením byla implicitní funkce, kterou neumíme vyřešit vzhledem k y . Někdy je ale možná ji vyřešit vzhledem k x , v našem případě $x = \frac{y}{\log(K/y)}$ na intervalech $(0, K)$, (K, ∞) pro $K > 0$ a na $(-\infty, K)$, $(K, 0)$ pro $K < 0$. To je řešení rovnice $x' y^2 - x^2 = xy$, což je opět rovnice s homogenní funkcí, má stacionární řešení $x = 0$. Řešení existuje jednoznačně všude v rovině kromě osy x . V bodech $y = K$ mají řešení nevlastní jednostranné limity, takže prodloužit nejdou. V bodě $y = 0$ mají řešení jednostranné limity rovny 0, ale jejich derivace mají nevlastní limity, takže tato řešení nejdou slepit. Nelze zde použít větu o lepení z přednášky, protože funkce $f(x, y)$ není v bodě $y = 0$ definovaná (větu lze upravit a v případě, že f je spojitá v levém i pravém okolí daného bodu a derivace zleva a zprava řešení a jeho derivace se v daném bodě rovnají a jsou vlastní, pak se obě řešení v tom bodě dají slepit).

I bez podrobností vidíme, že postup je jednodušší než v postupu v Řešení. Výsledné směrové pole a řešení pro x a pro y jsou symetrické podle diagonály. Rozdíl je ve stacionárních řešeních.