

Řešení příkladů ze cvičení MA3, 10.11.2025

Zjišťujeme jednoznačnost řešení funkcí více proměnných podle jedné nebo více proměnných a počítáme (parciální) derivace získaných funkcí. Budeme stručněji označovat parciální derivaci indexem, např. f podle x je f_x .

$$e^z + x^2y + z = 0$$

Můžeme nejdříve ověřit podmínku pro existenci a jednoznačnost funkce $z(x, y)$, ale ta nám vyjde i z dalšího výpočtu. Pak zderivujeme danou rovnost podle x a podle y s tím, že z je funkcí x, y . Poté jednu tuto derivaci podle x zderivujeme podle y :

$$\frac{\partial}{\partial z}(e^z + x^2y + z) = e^z + 1 \neq 0, \quad z_x e^z + 2xy + z_x = 0, \quad z_y e^z + x^2 + z_y = 0, \quad z_{xy} e^z + z_x e^z z_y + 2x + z_{xy} = 0$$

Dosazením bodu $(1, -1, 0)$ do z_x, z_y, z_{xy} dostaneme $z_x = 1, z_y = -1/2, z_{xy} = -3/4$.

Závěr. Rovnost $e^z + x^2y + z = 0$ má jednoznačné řešení jako $z(x, y)$ pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a druhá derivace z_{xy} má v bodě $(1, -1)$ hodnotu $-3/4$.

$$xu - yv = 0$$

$$xv + yu = 1$$

Tuto soustavu lze vyřešit pro neznámé x, y jako algebraické rovnice, ale nám jde o procvičení implicitních funkcí. Můžeme ověřit, že jakobián soustavy obou funkcí podle proměnných x, y je nenulový (ale i to nám vyjde z dalšího výpočtu). Pak zderivujeme obě funkce podle v a pak opět podle v . Získáme soustavu dvou rovnic s neznámými x_{vv}, y_{vv} , která má za determinant soustavy výše uvedený jakobián.

$$J(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow (x, y) \neq (0, 0), \quad \begin{array}{l} x_v u - y_v v - y = 0 \\ x_v v + x + y_v u = 0 \end{array}, \quad \begin{array}{l} x_{vv} u - y_{vv} v - y_v - y_v = 0 \\ x_{vv} v + x_v + x_v + y_{vv} u = 0 \end{array}, \quad y_{vv} = -2 \frac{ux_v + vy_v}{u^2 + v^2}$$

Pokud máme vypočítat y_{vv} v nějakém bodě, dosadíme ho nejdříve prvních derivací a získáme hodnoty x_v, y_v v tomto bodě. Ty pak dosadíme do výsledné derivace y_{vv} .

Řešení písemky

1. Je $y \leq 0, y' \leq 0$. Rovnice má stacionární řešení $y = 0$. Pro $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{-\sqrt{-y}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{-y} = x + C, C \in \mathbb{R}, x \geq -C \Rightarrow y = -(x/2 + C/2)^2, x \geq -C$$

Maximální řešení: $y = 0$ na $\mathbb{R}$ a $y = 0, x \in (-\infty, -C), y = -(x/2 + C/2)^2, x \in [-C, \infty), C \in \mathbb{R}$.

2. Je $x > 0$. Homogenní: $y = 0, y \neq 0 \Rightarrow y'/y = \log x \Rightarrow y_h = Ce^{x(\log x - 1)} = C(x/e)^x, C \in \mathbb{R}$

Partikulární: $C'(x/e)^x = x^x \Rightarrow C' = e^x \Rightarrow C = e^x \Rightarrow y_p = x^x$

Řešení: $y = C(x/e)^x + x^x, x \in (0, \infty), C \in \mathbb{R}$

3. Je $x \in \mathbb{R}$. Homogenní: $y_h = C_1 \cos(x/3) + C_2 \sin(x/3)$.

Partikulární $y_p = x(a \cos(x/3) + b \sin(x/3))$:

$$y_p' = \cos(x/3)(a + bt/3) + \sin(x/3)(b - at/3), y_p'' = \cos(x/3)(2b/3 - at/9) + \sin(x/3)(-2a/3 - bt/9)$$

Tedy $-6a \sin(x/3) + 6b \cos(x/3) = 6 \sin(x/3) \Rightarrow b = 0, a = -1, y_p = -x \cos(x/3)$

Řešení: $y = C_1 \cos(x/3) + C_2 \sin(x/3) - x \cos(x/3), x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$

4. Podle Věty 9.13 z MA 2, je $\sqrt{x}$ lipschitzovská na otevřeném intervalu J právě, když derivace funkce $\sqrt{x}$ je na J omezená.

1. Protože $(\sqrt{x})'$ je na $(0, 1)$ neomezená, není $\sqrt{x}$ lipschitzovská na $(0, 1)$ a tedy ani na $[0, 1]$.
2. Protože $(\sqrt{x})'$ je omezená na $(1/2, \infty)$, je na tomto intervalu lipschitzovská a tedy i na $[1, \infty)$.