

Řešení příkladů ze cvičení MA3, 20.10.2025

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

Řešíme na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $\lambda = 1$, takže $y_h = e^x(C_1 + C_2x)$. Rovnice pro variaci konstant mají řešení $C_1' = -1$, $C_2' = 1/x$ a tedy $C_1 = -x$, $C_2 = \log|x|$, $y_p = xe^x(\log|x| - 1)$

Závěr: Zadaná rovnice má řešení $y = e^x(C_1 + C_2x + x(\log|x| - 1))$.

$$y'' + 2y' - 3y = 6, \text{ vyřešíme metodou neurčitých koeficientů.}$$

Řešíme na $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice má kořeny rovné 1 a -3, takže $y_h = C_1e^x + C_2e^{-3x}$. Partikulární řešení bude konstanta A . Dosazením tohoto tvaru řešení získáme $A = -2$.

Závěr: Zadaná rovnice má řešení $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} - 2$.

$$y'' - 2y' + y = x^2, \text{ vyřešíme metodou neurčitých koeficientů.}$$

Řešíme na $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen rovný 1, takže $y_h = e^x(C_1 + C_2x)$. Partikulární řešení bude mít tvar $Ax^2 + Bx + C$. Po dosazení do rovnice dostaneme $A = 1$, $B = 4$, $C = 6$ (hodnota $A = 1$ se dá odhadnout z rovnice a stačí počítat B, C).

Závěr: Zadaná rovnice má řešení $y = e^x(C_1 + C_2x + x^2 + 4x + 6)$.

$$y'' + y = x \cos x, \text{ napíšeme jen příslušný tvar partikulárního řešení.}$$

Řešíme na $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice má kořeny rovné $\pm i$, takže $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Protože číslo $a + ib$ z metody neurčitých koeficientů je rovno i , dostáváme následující tvar partikulárního řešení:

$$y_p = x(Ax + B) \cos x + x(Cx + D) \sin x.$$

$$y'' + y = x e^x \cos x, \text{ napíšeme jen příslušný tvar partikulárního řešení.}$$

Řešíme na $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice má kořeny rovné ± 1 , takže $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Dostáváme následující tvar partikulárního řešení:

$$y_p = (Ax + B)e^x \cos x + (Cx + D)e^x \sin x.$$

$$x^2y'' + 3xy' + y = 3x^3, \text{ jedná se o Eulerovu rovnici, viz Poznámky}$$

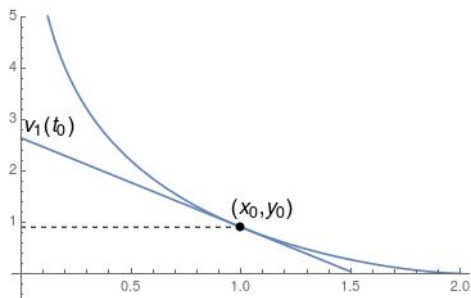
Řešíme na $\mathbb{R}$. Kvůli změně nezávisle proměnné $t = \log|x|$ řešíme nejdříve na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Označíme $z(t) = y(\pm e^t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Dostaneme rovnici $z'' + 2z' + z = \pm 3e^{3t}$, jejíž homogenní část má řešení $z_h = e^{-t}(C_1 + C_2t)$. Takže partikulární řešení bude tvaru Ae^{3t} a snadno zjistíme dosazením, že $A = \frac{3}{16}$ (variaci konstant pro původní rovnici by byla složitější).

Závěr: Zadaná rovnice má řešení $y = \frac{C_1 + C_2 \log|x|}{x} + \frac{3x^3}{16}$.

Eulerova rovnice byla v Poznámkách řešena jen pro $x > 0$. Pro $x < 0$ je $t = \log|x|$ a homogenní rovnice pro z vyjde stejně jako pro $x > 0$. Partikulární řešení pro z převedené na y pak obsahuje $|x|$; v našem případě se znaménko zrušilo a mohli jsme psát partikulární řešení bez absolutní hodnoty. Absolutní hodnotu u x ve jmenovateli jsme zrušili převedením znaménka minus pro $x < 0$ do konstant C_1, C_2 .

Traktrix

Budeme rovnou řešit úlohu pro zajíce a psa. Standardní traktrix je pro případ $v_1 = v_2$, nicméně je nutné dodat, že sestavení rovnice pro standardní traktrix je jednodušší (viz poznámku na konci tohoto příkladu).



Označíme si hledanou křivku jako $y(x)$. V čase t_0 bude zajíc na ose y v bodě v_1t_0 a pes v nějakém bodě (x_0, y_0) . Pes míří stále za zajícem, takže jeho směr je v daném bodě ve směru tečny. Ta má směrnici y_0' a podle trojúhelníku na obrázku se rovná $-(v_1(t_0) - y_0)/x_0$. Rovnost musí platit pro každé t a můžeme tedy odstranit indexy 0. Vynásobíme rovnost x a rovnost $xy' - y = -v_1t$ zderivujeme podle x , abychom se zbavili parametru t . Dostaneme (vysvětlení je za vzorcem):

$$y' - xy'' - y' = -v_1 \frac{dt}{dx} = v_1 \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = -\frac{v_1}{v_2} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Protože zkoumáme pohyb psa na křivce y , je ds kousek, který pes na křivce uběhne za čas dt , takže $ds/dt = v_2$. Víme, že $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, což dává $ds/dx = \sqrt{1 + y'^2}$. Dostáváme rovnici $xy'' = (v_1/v_2)\sqrt{1 + y'^2}$ pro počáteční podmínky $y(d) = 0, y'(d) = 0$. V rovnici chybí y , takže lze položit $z = y'$ a řešíme rovnici $xz' = (v_1/v_2)\sqrt{1 + z^2}$, kterou snadno vyřešíme pro počáteční podmínku $z(d) = 0$: $z + \sqrt{z^2 + 1} = (x/d)^{(v_1/v_2)}$, což dá $y' = z = (1/2)((x/d)^{(v_1/v_2)} - (x/d)^{-(v_1/v_2)})$. V tuto chvíli se můžeme vrátit k původní úloze o chlapci a autíčku, kde máme $v_1 = v_2$. Dostaneme rovnici pro traktrix (použijeme počáteční podmínku $y(d) = 0$):

$$y = d \log \frac{d + \sqrt{d^2 - x^2}}{x} - \sqrt{d^2 - x^2}.$$

Řešením rovnice pro obecnou úlohu s podmínkou $v_1 \neq v_2$ je následující rovnost:

$$y(x) = \frac{v_1 v_2 d}{v_2^2 - v_1^2} - \frac{v_2}{2} \left(\frac{d}{v_2 + v_1} \left(\frac{x}{d} \right)^{1 + \frac{v_1}{v_2}} + \frac{d}{v_2 - v_1} \left(\frac{x}{d} \right)^{1 - \frac{v_1}{v_2}} \right).$$

Pokud pes dohoní zajíce, znamená to, že křivka y protne osu y a tedy předchozí bude mít kladné řešení pro $x = 0$. Z toho vyplývá, že $v_2 > v_1$ (zřejmý předpoklad) a potom křivka protne osu y v bodě $v_1 v_2 d / (v_2^2 - v_1^2)$ a tedy v čase $t = v_2 d / (v_2^2 - v_1^2)$. Lze dodat, že rovnici pro originální traktrix můžeme sestavit jednodušeji pomocí Pythagorovy věty (protože vzdálenost mezi body $(x_0, y_0), (0, v_1 t)$ je konstantní).