

Řešení příkladů ze cvičení MA3, 13.10.2025

Viz Poznámky pro Bernoulliovu a exaktní rovnici.

Najděte všechna maximální řešení ODR $xy' + y = xy^2 \log x$

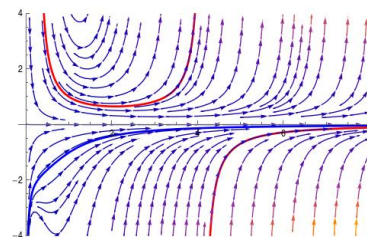
Rovnice má smysl pro $x > 0$. Má stacionární řešení $y = 0$ na $(0, \infty)$. Jedná se o Bernoulliovu rovnici, kterou převedeme na lineární rovnici pomocí nové proměnné $z(x) = 1/y(x)$ za podmínky $y \neq 0$:

$$y' = -\frac{1}{z^2} z' \Rightarrow -\frac{x}{z^2} z' + \frac{1}{z} = \frac{x}{z^2} \log x \Rightarrow z' - \frac{z}{x} = -\log x \Rightarrow z = Cx - \frac{x}{2} \log^2 x \Rightarrow y = \frac{1}{Cx - \frac{x}{2} \log^2 x}$$

na podintervalech intervalu $(0, \infty)$, kde $C - \frac{1}{2} \log^2 x \neq 0$.

Závěr: rovnice $xy' + y = xy^2 \log x$ má singulární řešení $y = 0$ na $(0, \infty)$ a následující maximální řešení. Jsou to všechna řešení, každým bodem poloroviny $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ prochází jediné řešení.

$$y = \frac{2}{x(2C - \log^2 x)}, \begin{cases} C < 0, x \in (0, \infty) \\ C = 0, x \in (0, 1), x \in (1, \infty) \\ C > 0, x \in (0, e^{-\sqrt{2C}}), x \in (e^{-\sqrt{2C}}, e^{\sqrt{2C}}), x \in (e^{\sqrt{2C}}, \infty) \end{cases}$$



Červený graf je pro $C = 1$ (na graf se nevešla třetí část), modrý je pro $C = -1$.

Rovnice $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$ tak, jak je napsaná, není žádného probraného typu. Pokud ale přehodíme závisle a nezávisle proměnnou, dostaneme rovnici $y^2 - 6x + 2yx' = 0$, což je lineární rovnice s neznámou $x(y)$.

Podobně rovnice $y'(x^2 y^2 + xy) = 1$ není žádného probraného typu, ale po záměně proměnných dostaneme rovnici $x^2 y^2 + xy = x'$ a to je Bernoulliova rovnice.

Najděte všechna maximální řešení ODR $x^2 + y^2 + 2y(x+1)y' = 0$

Rovnice má smysl v celé rovině. Podle věty o existenci a jednoznačnosti prochází každým bodem roviny, kromě přímkou $y = 0, x = -1$, jediné řešení. Přímkou $x = -1$ nemůže procházet žádné řešení (dosazením $x = -1$ do rovnice dostáváme $y^2 = -1$ v případě vlastní derivace $y'(-1)$). Přímkou $y = 0$ může procházet řešení jen počátkem

Jedná se o exaktní rovnici, protože $\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = 2y, \frac{\partial(2y(x+1))}{\partial x} = 2y$. Hledáme řešení ve tvaru $f(x, y) = C$:

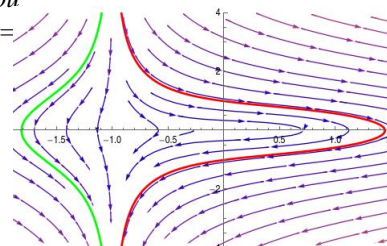
$$f(x, y) = \int (x^2 + y^2) dx = \frac{x^3}{3} + xy^2 + C(y) \Rightarrow 2y(x+1) = \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + C' \Rightarrow C' = 2y \Rightarrow C = y^2.$$

Naštěstí lze výsledek $x^3/3 + xy^2 + y^2 + K = 0$ v implicitním tvaru vyřešit pro y : $y = \pm \sqrt{(K - x^3/3)/(x+1)}$ a zbývá určit intervaly pro x . Žádné řešení neprochází přímkou $x = -1$ ani přímkou $y = 0$ (v tomto případě nelze řešení na této přímce slepit, protože tam obě funkce (jedna s +, druhá s - pro stejné K) mají nevlastní derivace).

Závěr: rovnice $x^2 + y^2 + 2y(x+1)y' = 0$ má následující řešení, která jsou maximální, jednoznačná ve všech bodech roviny, kromě bodů přímek $y = 0, x = -1$, kterými neprochází žádné řešení.

$$y = \pm \sqrt{\frac{K - x^3/3}{x+1}} \begin{cases} K < -\frac{1}{3}, x \in (\sqrt[3]{3K}, -1) \\ K > \frac{1}{3}, x \in (-1, \sqrt[3]{3K}) \end{cases}$$

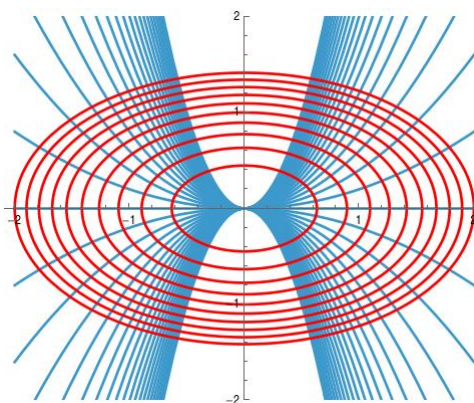
Pro $K = -1/3$ dostáváme $y = \pm \sqrt{3}\sqrt{x^2 - x + 1}$, které není řešením. Na obrázku jsou 4 řešení pro $\pm, K = 1$ (červené) a $k = -2$ (zelené),



Najděte všechny křivky kolmé na každou křivku danou rovností $y = ax^2, a \in \mathbb{R}$.

Hledáme funkce $y(x)$, jejichž grafy mají v průsečících s grafy funkcí ax^2 na sebe kolmé tečny. Tečna grafu funkce ax^2 má v bodě (x_0, ax_0^2) směrnici $2ax_0$, takže funkce $y(x)$ musí mít ve stejném bodě derivaci rovnou $-\frac{1}{2ax_0}$ (musíme předpokládat $x_0 \neq 0$). To musí platit pro všechna $a = y_0/x_0^2$, kde $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$, takže dostáváme diferenciální rovnici pro $y(x)$: $y' = -\frac{x}{2y}$. Její řešení je $2y^2 + x^2 = C$, což jsou elipsy ($C > 0, x \in [-\sqrt{C}, \sqrt{C}]$).

Řešením získané rovnice $y' = -\frac{x}{2y}$ je $2y^2 + x^2 = C$, implicitně dané funkce, jejímiž grafy jsou elipsy ($C > 0, x \in [-\sqrt{C}, \sqrt{C}]$). Otázka byla na všechny křivky s žádanou vlastností, takže přibude přímka $x = 0$.



Lineární rovnice 2. řádu

U prvních 4 rovnic uvedeme jen charakteristickou rovnici, kořeny a fundamentální systém řešení, vše je na $\mathbb{R}$.

$$y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, -2 \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \Rightarrow y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$$

$$y'' + 2y' - 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i \Rightarrow y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$y^{(4)} - 2y'' = 0 \Rightarrow \lambda^4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} \pm \sqrt{2} \Rightarrow y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x\sqrt{2}} + C_4 e^{-x\sqrt{2}}$$

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Řešení homogenní rovnice je na $\mathbb{R}$, ale zadaná rovnice má smysl jen na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$.

Variace konstant:

$$C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0, C_1' \cos x + C_2'(-\sin x) = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow C_1' = 1, C_2' = -\tan x \Rightarrow C_1 = x, C_2 = \log |\cos x|,$$

takže $y_p = x \sin x + \cos x \log |\cos x|$.

Závěr. Obecné řešení rovnice $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ je $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x \sin x + \cos x \log |\cos x|$ na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$.