

Řešení příkladů ze cvičení MA3, 6.10.2025

Viz Poznámky pro existenci a jednoznačnost řešení rovnic s homogenní funkcí.

Najděte všechna maximální řešení ODR $yy' = \frac{1-2x}{y}$

1. Rovnice $yy' = \frac{1-2x}{y}$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ má smysl na $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
2. Z tvrzení o řešeních ODR se separovanými proměnnými vyplývá, že každým bodem roviny, kromě přímky $y = 0$, prochází jediné řešení.
3. Rovnice nemá stacionární řešení.
4. Za předpokladu $y \neq 0$ dostaneme formální integraci

$$\int y^2 dy = \int (1-2x) dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = x - x^2 + C, x \in \mathbb{R} \text{ ale } y \neq 0 \Rightarrow x - x^2 + C \neq 0 \rightarrow x \neq x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4C}}{-2}.$$

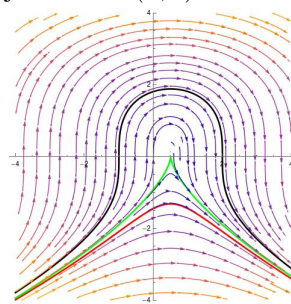
Máme podmínku $x - x^2 + C \neq 0$. Kořeny rovnice $x - x^2 + C = 0$ jsou $x_{1,2} = -(-1 \pm \sqrt{1+4C})/2$, takže dostáváme řešení

$$y = \sqrt[3]{3(x - x^2 + C)} \begin{cases} \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } C < -\frac{1}{4}, \\ \text{na } (-\infty, (1 - \sqrt{1+4C})/2), (1 - \sqrt{1+4C})/2, 1 + \sqrt{1+4C}/2, (1 + \sqrt{1+4C})/2, \infty) \text{ pro } C \geq -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

V posledním řádku je prostřední interval prázdný pro $C = -1/4$. I kdybychom původní rovnici vynásobili y , takže by měla smysl v celé rovině, osou x by stejně neprocházelo žádné řešení (ta uvedená mají v bodech $(x, 0)$ nevlastní derivace a nedají se do těchto bodů prodloužit). Uvedená řešení jsou maximální.

Závěr: rovnice $yy' = \frac{1-2x}{y}$ má za všechna maximální řešení výše uvedená řešení na intervalech závislých na hodnotě C . Všemi body (x_0, y_0) , $y_0 \neq 0$, prochází jediné řešení (na přímce $y = 0$ nemá daná rovnice smysl).

Ve směrovém poli je černý graf řešení pro $C > 1/4$, zelený pro $C = 1/4$ a červený pro $C < -1/4$.



Najděte všechna maximální řešení rovnice $xy' = -(x+y)$

1. Rovnice má smysl na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Přímkou $x = 0$ může procházet řešení jediné bodem $(0, 0)$.
2. Homogenní funkce $f(x, y) = -\frac{x+y}{x}$ je spojitá na $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, takže každým bodem této množiny prochází jediné řešení.
3. Rovnice nemá stacionární řešení. Osou y může procházet řešení jediné počátkem (zjistíme dosazením $x = 0$ do rovnice).
4. Za předpokladu $x \neq 0$ použijeme novou proměnnou $u = y/x$ a dostaneme

$$xu' = 1 - 2u \Rightarrow 1 + 2u = \frac{C}{x^2}, C \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0), (0, \infty) \Rightarrow y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}, C \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0), (0, \infty).$$

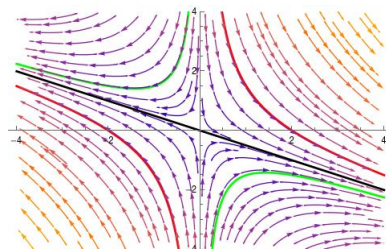
Uvedené řešení je maximální, nedá se prodloužit do bodu $x = 0$ kromě případu $C = 0$, kdy dostaneme řešení $y = -x/2$ na $\mathbb{R}$ (dosazením do rovnice nebo srovnáním jednostranných limit y a y' v 0).

Závěr: rovnice $xy' = -(x+y)$ má za všechna maximální řešení funkci $y = -x/2$ na $\mathbb{R}$ a funkce tvaru

$$y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}, C \neq 0, \text{ na } (-\infty, 0), (0, \infty),$$

Body $(0, y_0)$ prochází řešení jediné pro $y_0 = 0$ a to jediné, ostatními body roviny prochází jediné řešení.

Na obrázku jsou řešení pro $C=2$ (červené), $C=-1$ (zelené) a $y = -x/2$ (černé).



Najděte všechna maximální řešení rovnice $xyy' = y^2 - x^2$ a řešení splňující počáteční podmínku $y(1) = 3$

Rovnice má smysl na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jediným bodem na přímce $x = 0$, kterým může procházet řešení je počátek. Funkce $y = 0$ není řešením a budeme dále předpokládat $x \neq 0, y \neq 0$. Potom $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}$ a na pravé straně je homogenní funkce. Použijeme novou závisle proměnnou $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, takže $y' = xu' + u$ a dostaneme rovnici se separovanými proměnnými:

$$xu + u' = u - \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = -\log|x| + C, C \in \mathbb{R}, \log|x| < C \Rightarrow y^2 = x^2(2C - \log x^2), C \in \mathbb{R}, 0 < |x| < e^C.$$

Snadno ověříme, že každým bodem roviny kromě os x, y prochází uvedené řešení; přitom si musíme ověřit, že získané C je větší než $\log|x_0|$ (což ze vzorce pro vypočtené C hned vyplývá). Pro $y = 0$ bychom dostali $e^C = x_0$ nebo $e^C = -x_0$, což nelze. Musíme se podívat na chování řešení v krajních bodech jeho definičního intervalu. Řešení tam má hodnoty rovné 0. Derivace však budou v těchto bodech nevlastní, takže řešení nelze do těchto bodů prodloužit. Opravdu, $y' = \pm(\sqrt{2C - \log x^2} - 1/\sqrt{2C - \log x^2})$.

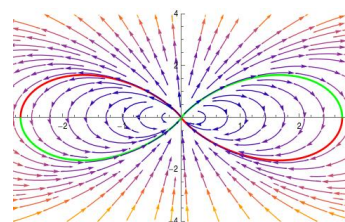
Závěr: rovnice $xyy' = y^2 - x^2$ má za všechna maximální řešení funkce tvaru pro $C \in \mathbb{R}$:

$$y = \pm x\sqrt{2C - \log x^2} \text{ na intervalech } (-e^C, 0), (0, e^C).$$

Všemi body roviny kromě os x, y prochází jediné řešení, osami x, y neprochází žádné řešení.

Dosadíme $(x, y) = (1, 3)$ do řešení a dostaneme $3 = \sqrt{K}$, takže $K = 9$ a hledané řešení je $y = x\sqrt{9 - \log x^2}$.

Na obrázku jsou sice jen dvě barvy, ale jde o 4 řešení.



Najděte všechna maximální řešení rovnice $y^2 - x^2y' = xyy'$ (s homogenní funkcí, jde o těžší příklad).

Rovnice má smysl pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a konstantní funkce $y = 0$ je maximálním řešením rovnice na $\mathbb{R}$. Základní tvar rovnice je $y' = \frac{y^2}{x^2 + xy}$ pro $x \neq 0, y \neq -x$. Přímka $y = -x$ není řešením rovnice, přímkou $x = 0$ může procházet řešení jediné počátkem. Kromě bodů na ose y a přímce $y = -x$ tedy prochází každým bodem roviny jediné řešení rovnice.

Funkce $f(x, y)$ je homogenní. Budeme pokračovat za předpokladu $x \neq 0, y \neq -x$ substitucí $y(x) = u(x)x, u \neq -1$ (budeme psát jen $y = u(x)$).

$$y' = u'x + u \Rightarrow u^2x^2 - x^2(u'x + u) = xux(u'x + u) \Rightarrow x(u + 1)u' = -u.$$

Dostali jsme rovnici se separovanými proměnnými, která má stacionární řešení $u = 0$ a pro $u \neq 0, x \neq 0$:

$$\int \frac{u+1}{u} du = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow u + \log|u| = -\log|x| + C \Rightarrow xue^u = K, K \in \mathbb{R} \text{ pro } x \neq 0, u \neq -1.$$

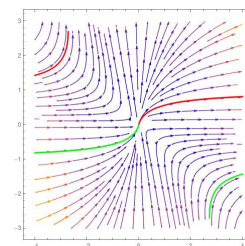
Za u dáme zpátky $u = y/x$ a dostaneme $ye^{(y/x)} = K, K \in \mathbb{R}$, pro $x \neq 0, y \neq -x, K \neq 0$ a na $\mathbb{R}$ pro $K = 0$. Dostáváme všechna řešení, protože z rovnosti $K = y_0e^{y_0/x_0}$ vidíme, že každým bodem $(x_0, y_0), x_0 \neq 0$ prochází řešení. Všimneme si, že y, K mají stejná znaménka. Otázkou je maximalita řešení $y(x)$ a intervaly, na kterých jsou řešení $y(x)$ definována. Problém je v tom, že řešení je dáno v implicitním tvaru a nedovedeme rovnost vyřešit pro y .

Vrátíme se k rovnosti $ue^u = K/x, x \neq 0$. Nemusíme uvažovat $y = 0$, takže předpokládáme $K \neq 0$. Funkce ue^u klesá od 0 k $-1/e$ na $(-\infty, -1)$ a roste od $-1/e$ do $+\infty$ na $(-1, \infty)$, na těchto intervalech má inverzní funkce φ , resp. ψ . Přečodem k y dostáváme $y = x\varphi^{-1}(K/x)$ pro $K/x \in (-1/e, 0)$ (tj. $x \in (-Ke, \infty)$ pro $K < 0$, $x \in (-\infty, -Ke)$ pro $K > 0$) a $y = x\psi^{-1}(K/x)$ pro $K/x \in (-1/e, \infty)$ (tj. $x \in (-Ke, 0) \cup (0, \infty)$ pro $K > 0$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, -Ke)$ pro $K < 0$). Posledně uvedené intervaly $(-Ke, 0), (0, -Ke)$ nelze použít, protože potom mají K, y rozdílná znaménka.

Zbývá problém, zda se obě poslední možnosti dají slepit v bodě $x = 0$ (rovnice má v tomto bodě smysl, i když funkce f není v tomto bodě definovaná). Nelze použít větu o lepení, ale stačí spočítat limity zprava funkce i derivace funkce $y = x\psi^{-1}(K/x)$ pro $K > 0, x > 0$ a zleva $y = x\psi^{-1}(L/x)$ pro $L < 0, x < 0$. Pokud jsou vlastní a rovnají se, slepit se obě funkce dají. Obě funkce mají jednostranné limity rovné 0. S derivacemi je to horší. Zatím nemáme derivace implicitní funkce, ale dá se použít derivace inverzní funkce $x = \frac{y}{\log((K/y))}$. Její jednostranné limity derivace v 0 pro příslušná y, K se rovnají 0, takže limity derivace původní funkce y jsou nevlastní. Slepít se tedy zkoumané funkce nedají.

Závěr: rovnice $y^2 - x^2 y' = x y y'$ má řešení v implicitním tvaru $y e^{(y/x)} = K$, $K \in \mathbb{R}$ na intervalech (pro x) $\mathbb{R}$ pro $K = 0$, $(-\infty, -Ke)$ a $(0, \infty)$ pro $K > 0$, $(-\infty, 0)$ a $(-Ke, \infty)$ pro $K < 0$. Na ose x prochází řešení jen počátkem (nekonečně mnoho), ostatními body prochází lokálně jediné řešení.

Na obrázku jsou obě řešení pro $K = 1$ (červené) a obě pro $K = -1$ (zelené).



Bylo by jednodušší hledat funkci $x(y)$ jako řešení rovnice $y^2 x' - x^2 = x y$. Z výše uvedeného řešení v implicitním tvaru vyplývá $x = \frac{y}{\log(K/y)}$ pro $K \neq 0$ a $y \in (0, K)$, (K, ∞) pro $K > 0$, $y \in (-\infty, K)$, $(K, 0)$ pro $K < 0$. Z tohoto řešení nedostaneme singulární řešení $x = 0$. Příslušné směrové pole je souměrné podle diagonály výše zobrazeného směrového pole.

Najděte všechna maximální řešení lineární rovnice $xy' + y = \log x + 1$

Rovnici řešíme na intervalu $(0, \infty)$. Nejdříve homogenní rovnici a pak variace konstanty:

1. $xy' + y = 0$ má řešení $y = C/x$, $C \in \mathbb{R}$ sice pro všechna $x \neq 0$, ale nás zajímají jen $x > 0$.
2. $y' = C'/x - C/x^2$, po dosazení do rovnice máme $C' = \log x + 1$, takže $C = x \log x$ (bez konstanty) a partikulární řešení je $y_p = \log x$.

Závěr: Všechna maximální řešení rovnice $xy' + y = \log x + 1$ jsou $y = \frac{C}{x} + \log x$ na $(0, \infty)$.