

## Řešení příkladů ze cvičení MA2, 19. a 21.5.2025

### Limity

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{y \rightarrow 0} (y - 1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x) = 1$$

$$|x \operatorname{sgn} y + y \operatorname{sgn} x| \leq |x| + |y| \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sgn} y + y \operatorname{sgn} x = 0$$

V následujících limitech použijeme polární souřadnice  $x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha$ . Musíme dávat pozor, protože  $\alpha$  může být libovolný úhel. Kdybychom brali posloupnost  $\{(x_n, y_n)\}$  konvergující k  $(0, 0)$ , měli bychom psát  $x_n = r_n \cos \alpha_n, y_n = r_n \sin \alpha_n$  a úhly  $\alpha_n$  nemusí nebo mohou konvergovat. Pokud tedy limita po substituci obsahuje  $\alpha$ , výchozí limita neexistuje (viz následující třetí příklad) nebo se nedá rozhodnout (viz následující pátý příklad)..

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} (r^2)^{r^2} = e^{\lim_{r \rightarrow 0^+} 2r^2 \log r} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r} = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r^2} \text{ neex.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2 - \cos(r \cos \alpha) - \cos(r \sin \alpha)}{r^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r \cos \alpha) \cos \alpha + \sin(r \sin \alpha) \sin \alpha}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r^4 \cos^4 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha}$$

což je 0, pokud nehledíme na  $\alpha$ . Jenže  $\alpha$  se může blížit k 0 a potom dostáváme výraz  $\frac{0}{0}$ , takže rozhodnout nelze. Vzhledem k mnoha možnostem přibližování  $\alpha$  k 0 se dá očekávat, že limita existovat nebude. Dosadíme-li  $y = kx, k \in \mathbb{R}$  (tj. přibližujeme se k 0 po přímkách), dostáváme limitu 0. Pokud se přibližujeme po parabole  $y = x^2$ , dostáváme hodnotu 1/2, takže limita opravdu neexistuje.

Pro poslední příklad z limit uvedeme dva postupy. V prvním použijeme substituci, ve druhém použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Předpokládáme že  $a \neq 0$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{\log(x/y)}{x^2 - y^2} \stackrel{x=y}{=} \lim_{(u,y) \rightarrow (1,a)} \frac{\log u}{y^2(u^2 - 1)} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\log u}{(u-1)(u+1)} \lim_{y \rightarrow a} \frac{1}{y^2} = \frac{!}{2a^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{\log x - \log y}{x - y} \frac{1}{x + y} = \frac{1}{2a} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{1}{c_{x,y}} = \frac{1}{2a} \frac{1}{a} = \frac{!}{2a^2}$$

kde  $c_{x,y}$  leží mezi body  $x, y$ .

### Derivace ve směru, gradient, tečná rovina

$$1. \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases} \Rightarrow f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = 0,$$

takže  $\operatorname{grad} f(0, 0) \cdot v = 0$  pro každý vektor  $v$ . Podle definice derivace ve směru  $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  dostaneme

$$f'_v(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3/\sqrt{2^3}}{t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow f'_v(0, 0) \neq \operatorname{grad} f(0, 0) \cdot v,$$

odkud vyplývá, že  $f$  nemá v  $(0, 0)$  totální diferenciál.

3. Rovnici tečné roviny dostaneme dosazením do vzorečku  $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$  s výsledkem  $8x - 8y - z - 4 = 0$ . Rovnice normály je  $x = x_0 - t f'_x(x_0, y_0), y = y_0 - t f'_y(x_0, y_0), z = z_0 + t$ , tj.

$$x = 2 + 8t, y = 1 - 8t, z = 4 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Koeficienty  $a, b$  tečné roviny  $z = ax + by$  se musí shodovat s koeficienty zadané roviny  $z = x + y/4$ , takže

$$1 = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1 + x^2 y^2}, \quad \frac{1}{4} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1 + x^2 y^2} \Rightarrow y = 4x, 16x^4 - 4x + 1 = 0.$$

Dosazením  $x = .4$  do polynomu  $16x^4 - 4x + 1$  dostaneme zápornou hodnotu. Protože u nejvyšší mocniny je kladný koeficient, má podle Bolzanovy věty uvedený polynom aspoň dva reálné kořeny (jeden se rovná 1/2, druhý zhruba 0,272). Dá se ukázat, že zbývající dva kořeny nejsou reálné. Řešení úlohy tedy zní, že daná plocha má ve dvou bodech tečnou rovinu rovnoběžnou s danou rovinou.