**Řešení příkladů z cvičení MA2, 12. a 14.5.2026**

**Metrické prostory, spojitost**

Nebudeme uvádět všechna řešení. Vynecháme ta, která mají jednoduché přímé postupy, kde stačí napsat, co víme a co máme dokázat a ono to hned vyjde.

**1**. *Spojitost a ekvivalence*

1. a 2. Použije se Heineho věta o vztahu konvergence a spojitosti.

3. Je-li $x \in \overline{A}$, existuje $\{a_n\} \subset A, a_n \to x$. Pak $f(a_n) = g(a_n) \to f(x) = g(x)$.

**2**.. *Prostor spojitých funkcí*

1. $\{f \rightsquigarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\} : C([0,1]) \to \mathbb{R}, \forall\, x \in [0,1] : f(x) - \delta \le g(x) \le f(x) + \delta \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \delta \le \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \delta$.

2. $\{f \rightsquigarrow \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\} : C([0,1]) \to C([0,1])$, skoro toéž jako v 1, jen místo $\int_0^1$ se píše $\int_0^x$.

3. *Rozhodněte, zda zobrazení* $\{f \rightsquigarrow f^2\} : C([0,1]) \to C([0,1])$ *a* $\{f \rightsquigarrow f'\} : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ *jsou spojitá.*
První zobrazení je spojité: $f_n \to f \Rightarrow \exists\, K\, \forall n : |f_n| \le K$. Potom $|f_n - f| \le \delta \Rightarrow |f_n^2 - f^2| \le 2K\delta + \delta^2$, což je volbou $\delta$ libovolně malé číslo

Druhé zobrazení není spojité: $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx) \to 0, f_n'(x) = \cos(nx) \not\to 0$.

4. $f \in F(X) \setminus C(X) \Rightarrow \exists\, \{x_n\} \subset X, x_n \to x, f(x_n) \not\to f(x)$. Lze předpokládat $\forall\, n : |f(x) - f(x_n)| \ge \varepsilon \Rightarrow \big(|g - f| \le \varepsilon/3 \Rightarrow |g(x) - g(x_n)| \ge \varepsilon/3 \Rightarrow g_n \not\to g(x)\big)$

**3**. *Spojitost funkcí více proměnných* lze ověřovat i přímo pomocí konvergence a Heineho věty)**.**

$$\sin(xy^2z^4) = \mathbb{R}^3 \overset{(x,y,z)\to(x,y^2,z^4)}{\longrightarrow} \mathbb{R}^3 \overset{\bullet}{\to} \mathbb{R} \overset{\sin}{\to} \mathbb{R}$$

$$\cos(x-y) + \sin(x^2+y^2) : (x,y) \to (x-y, x^2+y^2) \overset{\cos\times\sin}{\longrightarrow} (\cos(x-y), \sin(x^2+y^2) \overset{+}{\to} \cos(x-y) + \sin(x^2+y^2)$$

**4**. *Otevřené a uzavřené množiny v* $\mathbb{R}^n$

$$\{(x,y); x^3 + y^3 < 7\} = f^{-1}(-\infty, 7) \text{ kde } f(x,y) = x^3 + y^3 \Rightarrow \text{ otevřená}$$

$$\{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 = 4\} = f^{-1}(4) \text{ kde } f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \text{ uzavřená}$$

$$\{(x,y); |x+y| - x - y > 0, x > 0, y \le 0\} = f^{-1}(0,\infty) \cap g^{-1}(0,\infty) \cap h^{-1}(\infty, 0] \not\Rightarrow \text{ otevřená, uzavřená}$$

Poslední množina je otevřená, protože $y = 0$ nelze za ostatních podmínek nabývat, takže lze brát $y > 0$.

**5**. *Homeomorfismy*

1. Příslušné zúžení lineárního zobrazení $x \rightsquigarrow (x-a)\frac{d-c}{b-a} + c$ je homeomorfismus $[a,b]$ (resp. $(a,b)$) na $[c,d]$ (resp. $(c,d)$), pokud $c, d \in \mathbb{R}$. Např. pro $(a,b) = (0,1), (c,d) = (-\infty, \infty)$ lze vzít funkci $(\mathrm{arctg} x + \pi/2)/\pi$.

2. Spojité prosté zobrazení na intervalu v $\mathbb{R}$ je ryze monotónní, takže nemůže zobrazovat $[0,1)$ na $\mathbb{R}$ a $[0,1]$ na $(0,1)$.

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je homeomorfismus a nechť $f(0) = p$. Pak $A = f^{-1}(-\infty, 0), B = f^{-1}(0,\infty)$ jsou dvě disjunktní otevřené neprázdné množiny a jejich sjednocení s bodem $p$ je $\mathbb{R}^2$. Vezmeme $a \in A, b \in B$. Protože nějaká koule okolo $b$ leží celá v $B$, lze případně poposunout $b$ tak, aby neležel na přímce spojující body $a, p$. Pak úsečka $U$ od $a$ do $b$ neobsahuje $p$. Vezmeme na $U$ "supremum" bodů $q$, že úsečka $a, q$ je částí $A$. Tento bod ale nemůže ležet ani v $A$, ani v $B$ a je různý od $p$, což je spor.