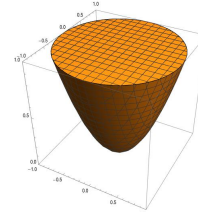


## Řešení příkladů ze cvičení 5.1.2026

**1. Najděte všechny globální extrémy funkce  $f(x, y, z) = x + y + z$  na množině  $M = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$**   
Snadno se ověří, že uvnitř kompaktní množiny  $M$  nejsou žádné extrémy. Povrch  $M$  rozdělíme na následující množiny:

1.  $x^2 + y^2 = z, z \in [0, 1)$ , do  $f$  dosadíme  $z = x^2 + y^2$ .
2.  $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ ,
3.  $x^2 + y^2 < 1, z = 1$ .



(ad 1)  $g(x, y, z) = x + y + x^2 + y^2 \Rightarrow g_x = 1 + 2x, g_y = 1 + 2y \Rightarrow$  krit.bod  $a_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(ad 2)  $F(x, y, \lambda) = x + y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \Rightarrow F_x = 1 + 2\lambda x, F_y = 1 + 2\lambda y \Rightarrow x = y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

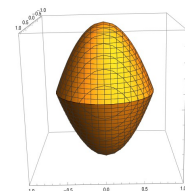
Žádné kritické body v 3 (funkce  $x + y + 1$  na otevřené množině).

Na části 2 jsou tedy dva kritické body  $a_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1), a_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ ;  $f(a_1) = -\frac{1}{2}, f(a_2) = \sqrt{2} + 1, f(a_3) = -\sqrt{2} + 1$ .

**Závěr:** Funkce  $f$  nabývá na  $M$  maxima  $\sqrt{2} + 1$  v  $a_2$ , minima  $-\frac{1}{2}$  v  $a_1$ .

**2. Glob. extrémy funkce  $f(x, y, z) = x^2 + y + z$  na množině  $M = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq z, x^2 + y^2 \leq -z + 1\}$**   
Snadno se ověří, že uvnitř kompaktní množiny  $M$  nejsou žádné extrémy. Rozložíme hranici  $M$  na následující množiny:

1.  $x^2 + y^2 = z, z \in [0, 1/2)$ , do  $f$  dosadíme  $z = x^2 + y^2$ .
2.  $x^2 + y^2 = 1 - z, z \in (1/2, 1]$ ,
3.  $x^2 + y^2 = 1/2, z = 1/2$ , do  $f$  dosadíme  $z = 1/2, x^2 = 1/2 - y^2$ .



(ad 1)  $g(x, y) = x^2 + y + x^2 + y^2 \Rightarrow g_x = 4x, g_y = 1 + 2y \Rightarrow$  krit.bod  $a_1 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), f(a_1) = -\frac{1}{4}$

(ad 2)  $g(x, y) = x^2 + y + 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow g_x = 0, g_y = 1 - 2y \Rightarrow$  krit.body  $a_x = (x, \frac{1}{2}, 1 - x^2 - \frac{1}{4}), f(a_x) = \frac{5}{4}$

(ad 3)  $g(y) = 1 - y^2 + y, |y| \leq \sqrt{2}/2 \Rightarrow$  krit.body  $a_{2,3} = (0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}), a_{4,5} = (\pm 1/2, 1/2, 1/2),$

$$f(a_2) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, f(a_3) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}, f(a_{4,5}) = \frac{5}{4}$$

Ve výsledku v (2) je  $x \in (-1/2, 1/2)$ , protože musí být  $1/2 < 1 - x^2 - 1/4 \leq 1$  (podle (3) lze do intervalu  $x \in (-1/2, 1/2)$  zahrnout i krajní body  $\pm 1/2$ ).

**Závěr:** Funkce  $f$  nabývá na  $M$  maxima  $5/4$  v bodech  $(x, \frac{1}{2}, 1 - x^2 - \frac{1}{4}), |x| \leq 1/2$ , minima  $-1/4$  v bodě  $a_1$ .

### 3. Vzdálenosti:

1. bodu  $(2, 1)$  od grafu funkce  $y = x^2$ ,
2. parabol  $y = -x^2, y = (x - 6)^2$ ,
3. bodu  $(0, 0, 0)$  od průniku ploch  $x^2 + y^2 = z^2, z = 1 + x + y$ .

ad 1: Hledáme minimum funkce  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2$  na grafu  $y = x^2$ . Dosadíme  $y = x^2$  do zkoumané funkce a získáme jediný kritický bod, jediné reálné řešení kubické rovnice  $2x^3 = x - 2 = 0$ , což je asi  $x = 1, 2$  s výslednou vzdáleností asi 0,9.

ad 2: Hledáme minimum funkce  $(x - u)^2 + (y - v)^2$ , kde  $y + x^2 = 0, v - (u - 6)^2 = 0$ . Dosadíme do zkoumané funkce za  $y, v$  a dostaneme novou zkoumanou funkci  $g(x, u) = (x - u)^2 + (x^2 + (u - 6)^2)^2$ . Sečteme rovnice  $g_x = 0, g_y = 0$  a dostaneme rovnou vztahy  $x = 0, u = 6$  a  $x = 6 - u$ . První vztah  $(0, 6)$  dává vzdálenost 6, druhý dá po dosazení do  $g_x = 0$  druhý kritický bod  $(1, 5)$  se vzdáleností  $\sqrt{20}$ , což je hledané minimum.

ad 3. Hledáme minimum funkce  $x^2 + y^2 + z^2$  za podmínek  $x^2 + y^2 = z^2, z = 1 + x + y$ . Použijeme Lagrangeovu funkci  $F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - x^2 - y^2) + \mu(z - x - y - 1)$ . Po snadné úpravě rovnic  $F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$

dostaneme vztah  $(x - y)(1 + \lambda) = 0$  a zjistíme, že  $\lambda + 1 \neq 0$ , takže  $x = y$ . Po dosazení do podmínek dostaneme dva kritické body  $x = y = -1 \pm \sqrt{2}/2$ ,  $z = -1 \pm \sqrt{2}$ . Hledané minimum nastává v bodě se znaménky minus.

**4. Dokázat nerovnost**  $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$ .

Asi nejjednodušší postup je dokázat, že globální minimum funkce  $f(x, y) = \frac{x^n + y^n}{2}$  v 1.kvadrantu za podmínky  $x + y = a$  není menší než  $(a/2)^n$ . Lze do  $f(x, y)$  dosadit  $y = a - x$  a počítat extrémy funkce  $f(x, a - x)$  na intervalu  $[0, a]$ . Snadno získáme kritické body  $0, a/2, a$  a srovnáním dostaneme minimum  $(a/2)^n$  v bodě  $x = y = a/2$  (v bodech  $x = 0, x = a$  je maximum). Dokazovaná nerovnost tedy platí. Stejně jednoduché bylo použít Lagrangeovu funkci  $\frac{x^n + y^n}{2} + \lambda(x + y - a)$ .

**5. Vypočítat normu matice**  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Pomocí extrémů funkce: Uvedená matice náleží zobrazení  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (s euklidovskými metrikami) se složkami  $f_1(x, y) = y, f_2(x, y) = 2x$ . Hledáme maximum funkce  $y^2 + 4x^2$  za podmínky  $x^2 + y^2 = 1$ . Je možné tuto podmínku dosadit do naší funkce a pak hledáme maximum funkce  $1 + 3x^2$  pro  $x \in [-1, 1]$ . Nebo použijeme Lagrangeovu funkci  $y^2 + 4x^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ . Vyjde nám maximum rovné 4 v krajních bodech. Takže norma matice je rovná 2.

Pomocí vlastních čísel:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1 \Rightarrow \|A\|_2 = 2.$$

Vypočítali jsme  $\ell_2$ -normu matice. Pokud bychom potřebovali  $\ell_1$ -normu, místo podmínky  $x^2 + y^2 = 1$  bychom použili podmínku  $|x| + |y| = 1$  pro maximum funkce  $|y| + |2x|$  (vyjde maximální součet sloupců). Podobně pro  $\ell_\infty$ -normu bychom použili jednotkovou sféru na  $\ell_\infty$ , tj maximum funkce  $\max\{|y|, |2x|\}$  za podmínky  $\max\{|y|, |2x|\} = 1$  (vyjde maximální součet řádků). V obou případech dostaneme pro naši matici číslo 2.