

Řešení příkladů ze cvičení 15.12.2025

1. Prostor X je separabilní, právě když je každá jeho r -sít, pro každé $r > 0$, spočetná.

Nechť každá r -sít v X je spočetná. Jsou-li A_n maximální $\frac{1}{n}$ -sítě, je $\bigcup_n A_n$ spočetná a hustá podmnožina X , takže X je separabilní.

Nechť existuje nespočetná r -sít A a D je hustá podmnožina v X . Pro $a \in A$ existuje $d_a \in D$, že $d(a, d_a) < r/3$. Potom pro různé prvky $a, b \in A$ je $d_a \neq d_b$, a máme prosté zobrazení $A \rightarrow D$, takže mohutnost D musí být nespočetná.

2. Prostor X je separabilní, právě když lze z každého jeho otevřeného pokrytí vybrat spočetné pokrytí.

Nechť $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí separabilního prostoru X . Víme, že X má spočetnou otevřenou bázi $\mathcal{B}$. Pro každé $G \in \mathcal{G}$ a $x \in G$, existuje $B_{G,x} \in \mathcal{B}$, že $x \in B_{G,x} \subset G$. Potom $\{B_{G,x}; G \in \mathcal{G}, x \in G\}$ je otevřené pokrytí X , které je spočetné, protože $\mathcal{B}$ je spočetná, označíme ho $\{B_n\}_n$. Pro každé n vybereme jednu množinu $G_n \in \mathcal{G}$, že $B_n \subset G_n$. Pak $\{G_n\}_n$ je spočetné pokrytí X vybrané z $\mathcal{G}$.

Nechť X není separabilní. Má proto podle předcházejícího tvrzení nespočetnou r -sít A . Uvědomíme si, že každá r -sít je uzavřenou množinou. Pak z pokrytí $\{B_{r/3}(a); a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ nelze vybrat spočetné pokrytí X .

3. Je-li X úplný a nemá izolované body, pak má mohutnost aspoň jako $\mathbb{R}$.

Podmínka o izolovaných bodech znamená, že každá koule je nekonečná. V X existují disjunktní uzavřené koule B_0, B_1 o poloměrech nejvýše 1. Koule B_0 obsahuje dvě disjunktní uzavřené koule B_{00}, B_{01} o poloměrech nejvýše 1/2, podobně B_1 obsahuje takové koule B_{10}, B_{11} . Indukcí získáme postupně uzavřené koule $B_{\{i_j\}}$, kde posloupnost $\{i_j\}$ je konečná a složená z 0 a 1, a platí, že je-li i_n poslední člen této posloupnosti, má $B_{\{i_j\}}$ poloměr nejvýše 2^{-n} , je částí koule s indexem $\{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}\}$ a je disjunktní s koulí s indexem $\{i_0, i_1, \dots, 1 - i_n\}$.

Máme-li nekonečnou posloupnost $\{i_j\}$ složenou z 0 a 1, tvoří množiny $F_n = B_{i_0, \dots, i_n}$ klesající posloupnost uzavřených množin v X s průměry konvergujícími k 0. Podle Cantorovy věty má tento systém jednobodový průnik. Pro různé posloupnosti dostaneme různé body, takže máme prosté zobrazení množin všech posloupností 0 a 1 do X . Stačí nyní znát tvrzení, že množina uvedených posloupností má stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$.

Cantorova diagonální metoda dává výsledek, že uvedená množina posloupností je nespočetná. My chceme více. K tomu si stačí uvědomit, že uvedené body průniku systémů koulí jsou v jednoznačném vztahu s Cantorovou množinou C . Cantorova funkce zobrazuje C na $[0, 1]$ a tedy nemá menší mohutnost než $[0, 1]$. Protože je $C \subset [0, 1]$, je mohutnost C stejná jako $[0, 1]$ a tedy jako $\mathbb{R}$.

4. Prostor $\mathbb{R}$ lze napsat jako sjednocení množiny 1.kategorie a množiny Lebesgueovy míry nula.

Vezmeme klesající posloupnost $\{\varepsilon_n\}$ s limitou 0 a uspořádáme $\mathbb{Q}$ do posloupnosti $\{q_n\}$. Pak vezmeme $G_n = \bigcup_n B_{2^{-n}\varepsilon_n}(q_n)$, což je otevřená množina obsahující $\mathbb{Q}$ a je tedy hustá. Její komplement $F_n = \mathbb{R} \setminus G_n$ je proto uzavřená řídká množina. Míra G_n je nejvýše $\sum 2^{-n}\varepsilon_n = \varepsilon_n$. Označíme $A = \bigcap_n G_n, B = \mathbb{R} \setminus A = \bigcup_n F_n$. Množina B je 1.kategorie, množina A má míru $\lim \varepsilon_n = 0$ a $\mathbb{R} = A \cup B$.

Řešení písemky

1. Ukažte, že pro $F(x, y) = x^2 e^{1-y} - y^2 e^{x-1}$ určuje rovnice $F(x, y) = 0$ v jistém okolí $U \times V$ bodu $[1, 1]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující pro $x \in U$ rovnice $F(x, f(x)) = 0, f(1) = 1$. Vypočtěte $f'(1)$.

F má všecny parciální derivace spojitě, $F(1, 1) = 0$,

$$F_x = 2xe^{1-y} - y^2 e^{x-1}, F_y = -x^2 e^{1-y} - 2ye^{x-1} \Rightarrow F_x(1, 1) = 1, F_y(1, 1) = -3 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{3}$$

2. Nalezněte na $\mathbb{R}^2$ všechny lokální extrémů funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$.

$$\text{grad } f = (4x^3 - 2(x + y), 4y^3 - 2(x + y)) \Rightarrow x = y, x^3 - x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$$

$$f_{xx} = 12x^2 - 2, f_{xy} = -2, f_{yy} = 12y^2 - 2 \Rightarrow K(0, 0) = -4hk, K(1, 1) = 10h^2 - 4hk + 10k^2$$

$$K(0, 0) = -4hk, K(1, 1) = 10h^2 - 4hk + 10k^2 = 10(h - 2k/10)^2 + k^2(1 - 4/10), K(-1, -1) = K(1, 1).$$

Funkce f má lokální minimum v bodech $(1, 1)$ a $(-1, -1)$. Protože $-4hk = -(h + k)^2 + (h - k)^2$, má f v $(0, 0)$ sedlo.

3. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $x + y - 1$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 9(x^2 + y^2) = 2x^2y^2\}$.

Označíme $F(x, y, \lambda) = x + y - 1 + \lambda(9(x^2 + y^2) - 2x^2y^2)$.

Pak $\text{grad } F = (1 + \lambda(18x - 4xy^2), 1 + \lambda(18y - 4x^2y), 9(x^2 + y^2) - 2x^2y^2) = 0, \Rightarrow \lambda \neq 0$ (jinak $1 = 0$). Vidíme, že bod $(0, 0)$ leží v M , ale nesplňuje první rovnici $\text{grad } F = 0$, Odečtením prvních dvou rovnic dostaneme

$$\lambda(x - y)(9 + 2xy) = 0 \Rightarrow x = y, x = -\frac{9}{2y}$$

Dosazením $x = y \neq 0$ do M dostaneme body $a_1 = (3, 3), a_2 = (-3, -3)$. Dosazením rovnosti $x = -9/(2y)$ do M zjistíme, že pro žádné y takový bod není v M . Z rovnic $\text{grad } F = 0$ zjistíme λ_i pro body a_i : $\lambda_1 = \frac{1}{54}, \lambda_2 = -\frac{1}{54}$.

$$f_{xx} = \lambda(18 - 4y^2), f_{xy} = -8\lambda xy, f_{yy} = \lambda(18 - 4x^2),$$

$$K(h, k)(a_2) = -\frac{1}{3}h^2 - \frac{4}{3}hk - \frac{1}{3}k^2 = -\frac{1}{3}((h + 2k)^2 + k^2), K(h, k)(a_3) = \frac{1}{3}((h + 2k)^2 + k^2)$$

Dostáváme lokální maximum v $(3, 3)$, lokální minimum v $(-3, -3)$. Dá se zjistit, že daná funkce nemá na M globální extrémy.

4. Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a e je metrika na X ekvivalentní s d . Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

1. Je-li $e \geq d$, je prostor (X, e) úplný.

2. Je-li $e \leq d$, je prostor (X, e) úplný.

(a) Platí: $\{x_n\}$ cauchyovská v $e \Rightarrow$ cauchyovská v $d \Rightarrow \{x_n\}$ konverguje v $d \Rightarrow \{x_n\}$ konverguje v e .

(b) Neplatí: d diskrétní metrika na $\mathbb{N}$, $e(x_n, x_{n+1}) = 1/n$ má stejnou konvergenci jako d , $e \leq d$, $\{1/n\}$ cauchyovská v e a nemá limitu.