

Řešení příkladů ze cvičení á.12.2025

Extrémy funkcí více proměnných

(Ve všech příkladech jsou podmínky pro použití příslušných vět splněny: spojité druhé derivace, hodnost Jacobiho matice je maximální.)

Lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na $M = \{(x, y, z); x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 1\}$.

Celé zadání je nezávislé na permutaci proměnných x, y, z i znamének $\pm$. Budeme tedy uvažovat jen nezáporná čísla a jednu z možností při permutaci. Označíme $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - 1)$ a řešíme $\text{grad } F = 0$ pro neznámé x, y, z, λ . Po úpravě rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}x(1 + \lambda(2x^2 + y^2 + z^2)) &= 0 \\y(1 + \lambda(x^2 + 2y^2 + z^2)) &= 0 \\z(1 + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2)) &= 0 \\x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

1. $x = y = z = 0$: $(0, 0, 0) \notin M$ a tedy $(0, 0, 0)$ není kritický bod.

2. $x = y = 0 \neq z$: $(0, 0, z) \in M$ pro $z = 1$ a třetí rovnice dává $\lambda = -1/2$. Dostáváme kritický bod $a_1 = (0, 0, 1)$, $\lambda = -1/2$.

3. $x = 0, y, z \neq 0$: po vydělení druhé a třetí rovnice y, z o odečtení třetí rovnice od druhé dostaneme $\lambda(y^2 - z^2) = 0$ a tedy $y = z$ (zřejmě $\lambda \neq 0$) a po dosazení do M vyjde $y = z = 1/\sqrt[4]{3}$. Z druhé rovnice spočítáme $\lambda = -1/\sqrt{3}$. Kritický bod $a_2 = (0, 1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3})$, $\lambda = -1/\sqrt{3}$.

4. $xyz \neq 0$: Jak v případě 3 odečteme první z třetí rovnice od sebe a dostaneme $x = y = z$, dosazením do M je jejich hodnota $1/\sqrt[4]{6}$ a pak $\lambda = -\sqrt{6}/4$. Kritický bod $a_3 = (1/\sqrt[4]{6}, 1/\sqrt[4]{6}, 1/\sqrt[4]{6})$, $\lambda = -\sqrt{6}/4$.

V bodech a_1, a_2, a_3 dostaneme postupně Hessovy matice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}, 0, 0 \\ 0, \frac{1}{2}, 0 \\ 0, 0, -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, 0, 0 \\ 0, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \\ 0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2, -1, -1 \\ -1, -2, -1 \\ -1, -1, -2 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria je třetí matice negativně definitní a v bodě a_3 je tedy lokální maximum. První dvě matice nejsou definitní a tedy nic neříkají o extrémech. Podíváme se na kvadratické formy $K(h, k, l)$ v těchto bodech.. Nejdříve lineární forma získaná z vazebních podmínek:

$$h(4x^3 + 2xy^2 + 2xy^2) + k(4y^3 + 2yx^2 + 2yz^2) + l(4z^3 + 2zx^2 + 2zy^2).$$

V bodech a_1, a_2, a_3 dostaneme postupně $K(h, k, l)$, lineární formu (upravenou) a kvadratickou formu po dosazení z lineární formy:

$$\begin{aligned}a_1 : K(h, k, l) &= \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}k^2 - 2l^2, \quad 4l = 0, \quad K(h, k) = \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}k^2 \\a_2 : K(h, k, l) &= \frac{1}{3}h^2 - \frac{4}{3}k^2 - \frac{4}{3}kl - \frac{4}{3}l^2, \quad k + l = 0, \quad K(h, k) = \frac{1}{3}h^2 - \frac{4}{3}k^2\end{aligned}$$

Závěr: Funkce f na M nabývá v a_1 lokální minimum, v bodě a_3 lokální maximum, v bodě a_2 je sedlo.

Lokální extrémy funkce $f(x, y) = xyz$ na $M = \{(x, y, z); x + y + z = 5, xy + xz + yz = 8\}$.

Z první podmínky můžeme vypočítat z a dosadit do druhé podmínky a do f a tím snížíme počet proměnných na dvě. Kvůli procvičení však budeme postupovat pomocí Lagrangeovy funkce:

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x + y + z - 5) + \mu(xy + yz + xz - 8).$$

Její gradient je roven

$$(yz + \lambda + \mu(y + z), xz + \lambda + \mu(x + z), xy + \lambda + \mu(x + y), x + y + z - 5, xy + yz + xz - 8).$$

a je nulový, pokud jsou splněny rovnosti (po vzájemném odečtení prvních tří složek)

$$(y - x)(z + \mu) = 0, \quad (y - z)(x + \mu) = 0, \quad (x - z)(y + \mu) = 0.$$

Řešením nemůže být případ $x = y = z$ (nesplnění vazebních podmínek), takže jedna ze závorek obsahujících μ musí být nenulová a tedy 2 složky hledaných kritických bodů musí být stejné, třetí různá. Protože zadání úlohy je invariantní vzhledem k permutaci souřadnic, zvolíme případ $x = y \neq z$. To znamená, že $\mu = -x$ a $\lambda = xy$ z rovnic gradientu. Ostatní kritické body se dostanou permutací. Dosazením zvoleného případu do zbývajících dvou složek gradientu (do vazebních podmínek) dostaneme rovnice

$$2x + z = 5, \quad x^2 + 2xz = 8 = 0.$$

Z první rovnice stačí vypočítat z a dosadit do druhé. Dostaneme $3x^2 - 10x - 8 = 0$ s kořeny $x = 2, x = 4/3$. Kritické body (x, y, z, λ, μ) tedy jsou $(2, 2, 1, 4, -2), (4/3, 4/3, 7/3, 16/9, -4/3)$. Hessova matice funkce F bez proměnných λ, μ (postupně obecně, pro $x = 2$ a pro $x = 4/3$):

$$\begin{pmatrix} 0 & z + \mu & y + \mu \\ z + \mu & 0 & x + \mu \\ y + \mu & x + \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poslední dvě matice nejsou definitní a nedají nám rozhodnutí o nabývání extrémů v získaných bodech. Použijeme tedy lineární formy z vazebních podmínek (použijeme formálně derivace):

$$dx + dy + dz = 0, \quad (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz = 0$$

Vypočítáme dvě z proměnných dx, dz, dy pomocí třetí. Musíme dát pozor, protože pro a_1, a_2 nelze počítat dx, dy pomocí dz . Spočítáme dy, dz pomocí dx a dostaneme $dy = -dx, dz = 0$. Kvadratická forma pro F je rovna $dx dy + dx dz + dy dz$ a po dosazení vypočtených dy, dz má tvar $-(z + \mu) dx^2$. V bodě $(2, 2, 1)$ je $z + \mu = -1$ a tedy v tomto bodě má f lokální minimum, v bodě $(4/3, 4/3, 7/3)$ je $z + \mu = 1$ a tedy f má v tomto bodě lokální maximum.

Metrické prostory

(Druhá a čtvrtá úloha byly zadány jako úlohy na přemýšlení a obě budou dokázány na cvičení 15.12.)

Metrický prostor je totálně omezený, právě když každá jeho posloupnost má cauchyovskou podposloupnost.

Existence cauchyovské podposloupnosti v totálně omezeném prostoru je obsaženo v důkazu z přednášky. Opačně, pokud X není totálně omezený, obsahuje nekonečnou r -sít pro nějaké $r > 0$ a z ní nelze vybrat cauchyovská posloupnost.

Je-li funkce f na kompaktním prostoru neexpansivní, pak je f kontrakce.

Je-li metrický prostor (X, d) kompaktní a pro spojitou funkci f na X lze pro každé kladné r nalézt $x_r \in X$, že $d(x_r, f(x_r)) < r$, pak f má pevný bod.

Existuje posloupnost $\{x_n\}$ v X , že $d(x_n, f(x_n)) < 1/n$. Vybereme konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ k bodu x a potom $d(x, f(x)) = 0$.

Z Bolzanovy věty o existenci nulové hodnoty funkce vyplývá, že každá spojitá funkce $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ má pevný bod.

Nechť (X, d) je úplný prostor a $f : X \rightarrow X$ je surjekce a antikontrakce (existuje $k > 1$, že pro každé $x, y \in X$ platí $d(f(x), f(y)) \geq k d(x, y)$). Pak f má jediný pevný bod.

Protože $d(x, y) > 0$ pro $x \neq y$, je funkce f bijekce a její inverzní zobrazení je kontrakce $X \rightarrow X$ a má tedy pevný bod podle Banachovy věty. Zřejmě je x pevný bod zobrazení f , právě když je pevným bodem zobrazení f^{-1} .