

Řešení příkladů ze cvičení MA3, 29.9.2025

Najděte všechna maximální řešení ODR $y' = ky, k \in \mathbb{R}$

1. Rovnice $y' = ky, k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ má smysl na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x, y) = ky$ je spojitá na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, takže každým bodem roviny prochází jediné řešení.
3. Rovnice má stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$.
4. Za předpokladu $y \neq 0$ dostaneme formální integraci

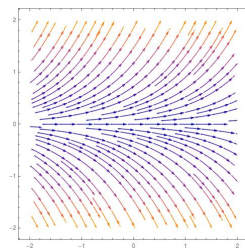
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log |y| = kx + C, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^C e^{kx}, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$$

5. V poslední položce postupu řešení uděláme diskuzi získaných funkcí $t(x)$ vzhledem k podmínkám z předchozích položek. Získali jsme všechna řešení? Jsou naše řešení maximální?

V položkách 1-4 jsme žádné podmínky nedostali, máme řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$ a pro $y \neq 0$ máme $|y| = e^C e^{kx}, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Označíme $C_1 = e^C$, takže $C_1 > 0$. Je-li $y > 0$, máme $y = C_1 e^{kx}$, je-li $y < 0$, máme $y = -C_1 e^{kx}$. Protože vyřešená rovnost má smysl i pro $y = 0$, máme $y = 0 = 0e^{kx}$. Když to dáme dohromady, dostaneme obecné řešení $y = Ke^{kx}, K \in \mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Tato řešení jsou maximální a jiná nejsou, protože každým bodem roviny prochází právě jedno řešení. Pokud chcete jednoznačnost ověřit, stačí zjistit, že pro každé $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ existuje jediné C vyhovující rovnici $y_0 = Ce^{kx_0}$, což je zřejmé.

Závěr: rovnice $y' = ky$ má na $\mathbb{R}$ obecné řešení $y = Ke^{kx}, K \in \mathbb{R}$. Žádná jiná řešení nemá, každým bodem roviny prochází jediné řešení.



Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = 2\sqrt{y}$

1. Rovnice má smysl na $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.
2. Funkce $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ je spojitá na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, takže každým bodem této množiny prochází jediné řešení.
3. Rovnice má stacionární maximální řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$
4. Za předpokladu $y \neq 0$ dostaneme formální integraci

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx \Rightarrow \sqrt{y} = x + C, x \in (-C, \infty), C \in \mathbb{R}, \text{ takže } y = (x + C)^2, x \in (-C, \infty), C \in \mathbb{R}.$$

Kdybychom po výrazu $\sqrt{y} = x + C$ zapomněli dát interval pro x , dostali bychom řešení $y = (x + C)^2$ a tato rovnost platí na $\mathbb{R}$. Klesající část této paraboly však nemůže být řešením (např. ze zadání rovnice plyne $y' \geq 0$, takže řešení nemůže být nikde klesající).

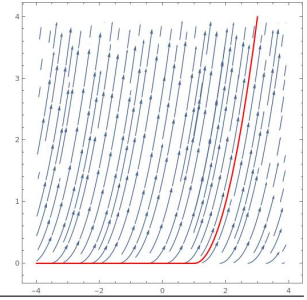
Vidíme, že řešení $y = 0$ je singulární a nedostaneme ho ze získaného obecného řešení pro žádné C .

Řešení $y = (x + C)^2$ není řešením na celém $\mathbb{R}$, kde má rovnice smysl. Dá se prodloužit doleva za bod $x = -C$? Prodloužit to nelze, pokud má řešení v daném bodě nevlastní limitu. To v našem případě není a řešení má v bodě $x = -C$ zprava limitu rovnou 0. Máme jediné řešení, které má v $x = -C$ zleva limitu 0 a to je řešení $y = 0$. Podle věty o lepení z přednášky lze tedy řešení $y = (x + C)$ na $(-C, \infty)$ a řešení $y = 0$ na $(-\infty, -C)$ v bodě $x = -C$ slepit a dostaneme maximální řešení rovnice.

Závěr: rovnice $y' = 2\sqrt{y}$ má za všechna maximální řešení funkci $y = 0$ a funkce tvaru (pro $C \in \mathbb{R}$)

$$y = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, -C) \\ (x + C)^2 & \text{pro } x \in [-C, +\infty) \end{cases}$$

Všemi body $(x_0, 0)$, prochází nekonečně mnoho řešení, body $(x_0, y_0), y_0 > 0$, prochází jediné řešení. Jiná řešení nejsou.



Najděte všechna maximální řešení rovnice $y'(x+1) + xy = 0$

1. Rovnice má smysl na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x, y) = \frac{-xy}{x+1}$ je spojitá na intervalech $(-\infty, -1) \times \mathbb{R}$ a $(-1, \infty) \times \mathbb{R}$, takže každým bodem intervalů prochází jediné řešení.
3. Rovnice má stacionární maximální řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$.
4. Pro $y \neq 0$ a $x \neq -1$ dostáváme formálním vyřešením

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{x}{x+1} dx \Rightarrow \log |y| = -x + \log |x+1| + C \Rightarrow |y| = e^C e^{-x} |x+1| = C_1 e^{-x} |x+1|, C_1 > 0.$$

Pokud mají y a $x+1$ stejné znaménko, můžeme absolutní hodnoty odstranit. Pro různá znaménka těchto čísel dáme před konstantu C_1 záporné znaménko a opět můžeme absolutní hodnoty odstranit. Můžeme tedy odstranit absolutní hodnoty s tím, že C_1 je libovolná nenulová konstanta. Ale $y = 0$ je také řešení dané rovnice a to nám dá konstanta $C_1 = 0$. Dostali jsme tedy obecné řešení $y = C(x+1)e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Dostali všechna řešení, jejichž existence vyplývá z existenční věty (můžeme i ověřit, pro jaké dvojice (x_0, y_0) existuje C tak, že $y_0 = C(x_0+1)e^{-x_0}$).

Náš postup vylučoval hodnotu $x = -1$ a dostali jsme řešení na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$. Uvedené řešení je ale definované i v bodě -1 a má v tomto bodě derivaci. Ze spojitosti vyplývá (nebo výpočtem nebo použitím věty o lepení), že náš výsledek je řešením na celém $\mathbb{R}$.

Závěr: rovnice $y'(x+1) + xy = 0$ má na $\mathbb{R}$ obecné řešení $y = C(x+1)e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Žádná jiná řešení nemá. Bodem $(-1, 0)$ prochází nekonečně mnoho řešení, body $(-1, y_0), y_0 \neq 0$, neprochází žádné řešení, ostatními body prochází jediné řešení.

