Matematická analýza I

ZS 2020/21

2. zápočtový test

4.12.2020

1. (5 bodů) Pro $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ uvažujte funkci

$$f(x) := \frac{\arcsin\left(x + \frac{\arctan\left(\frac{1}{1-2x}\right)}{\pi}\right)}{\arcsin(1/4)}$$

Ukažte, že interval $(-1/2, 1/2)$ je součástí definičního oboru a spočtěte limity v krajních bodech. Spočtěte $f'(x)$ pro $x \in (-1/2, 1/2)$ a ukažte, že f má na intervalu (po dodefinování limitami v krajních bodech) $[-1/2, 1/2]$ inverzi f^{-1}. Spočtěte $(f^{-1})'(1)$.

2. (5 bodů) Nalezněte funkci $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je lichá a splňuje

$$F'(x) = |\sin x|^3 \cos^2 x + x^3 \arctan x.$$

Řešení

1:Nejdříve je vidět, že funkce není definovana pro $x = 1/2$ a funkce arcsin je definovanaá na intervalu $[-1, 1]$, potřebujeme tedy ověřit, kdy

$$-1 \leq x + \frac{\arctan\left(\frac{1}{1-2x}\right)}{\pi} \leq 1 \tag{1}$$

Navic vime, ze funkce arctan ma obor hodnot $(-\pi/2, \pi/2)$ a tedy plati

$$x - 1/2 < x + \frac{\arctan\left(\frac{1}{1-2x}\right)}{\pi} < x + 1/2$$

a proto jevidet, ze [ro $x \in (-1/2, 1/2)$ plati i (1). V bode $x = -1/2$ se limita spocita lehce, nebot jsou vsechny funkce dobre definovane a tedy

$$\lim_{x\to 1/2_+} f(x) = \frac{\arcsin\left(-\frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}\right)}{\arcsin(1/4)}$$

Pro limitu zleva v $x = 1/2$ pouzijeme spojitost arcsin a vetu o limite slozene funkce

$$\lim_{x\to 1/2_-} f(x) = \frac{\arcsin\left(\lim_{x\to 1/2_-}\left(x + \frac{\arctan\left(\frac{1}{1-2x}\right)}{\pi}\right)\right)}{\arcsin(1/4)} = \frac{\arcsin 1}{\arcsin(1/4)}$$

Nyní spočteme derivaci na intervalu $(-1/2, 1/2)$. Použijeme věty o derivaci součtu, součinu, a složené funkce:

$$f'(x) := \frac{\left(\arcsin\left(x + \frac{\arctan\left(\frac{1}{1-2x}\right)}{\pi}\right)\right)'}{\arcsin(1/4)} = \frac{\left(x + \frac{\arctan\left(\frac{1}{1-2x}\right)}{\pi}\right)'}{\arcsin(1/4)\sqrt{1 - \left(x + \frac{\arctan\left(\frac{1}{1-2x}\right)}{\pi}\right)^2}}$$

$$= \frac{1 + \frac{\frac{2}{(1-2x)^2}}{\pi\left(1+\left(\frac{1}{1-2x}\right)^2\right)}}{\arcsin(1/4)\sqrt{1 - \left(x + \frac{\arctan\left(\frac{1}{1-2x}\right)}{\pi}\right)^2}} = \frac{1 + \frac{2}{\pi((1-2x)^2+1)}}{\arcsin(1/4)\sqrt{1 - \left(x + \frac{\arctan\left(\frac{1}{1-2x}\right)}{\pi}\right)^2}}.$$

Derivace je na celém intervalu kladná, funkce je tedy rostoucí a má inverzi. Navíc, vidíme, že

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{4(\pi + 1)}{\pi \arcsin(1/4)\sqrt{15}}$$

a tedy ihned odvodíme

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{\pi \arcsin(1/4)\sqrt{15}}{4(\pi + 1)}$$

2: Nejdříve si nalezneme primitivní funkce

$$G_1(x) := \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx, \qquad G_2(x) := \int x \arctan x \, dx.$$

Pro prvni cast pouzijeme prvni vetu o substituci

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = -\int (1-\cos^2 x) \cos^2 x \cdot (-\sin x) \, dx \overset{y=\cos x; dy=-\sin x \, dx}{=} -\int (1-y^2) y^2 \, dy$$
$$= -\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} = -\frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{\cos^5(x)}{5}$$

Na druhou cast pouzijeme integraci per partes:[1]

$$\int x^3 \arctan x \, dx = \frac{x^4}{4} \arctan x - \int \frac{x^4}{4(1+x^2)} \, dx = \frac{x^4}{4} \arctan x - \int \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4(1+x^2)} \, dx$$
$$= \frac{x^4}{4} \arctan x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{\arctan x}{4}.$$

Nyni se vratime k vypoctu F. Rozdelime $\mathbb{R}$ na intervaly, kde je sin kladny a zaporny a pote vidime, ze

$$F'(x) = \begin{cases} G_1'(x) + G_2'(x) & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi), \ k \in \mathbb{Z} \\ -G_1'(x) + G_2'(x) & x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi). \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

coz muzeme jednodusseji zapsat jako

$$F'(x) = (-1)^m G_1'(x) + G_2'(x) \qquad\qquad x \in [m\pi, (m+1)\pi), \ m \in \mathbb{Z}.$$

Protoze se derivace rovnaji, muzeme tedy pouzit vypocet pro G_1 a G_2 a na kazdem intervalu tak mame

$$F(x) = (-1)^m \left(\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} \right) + \frac{x^4}{4} \arctan x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{\arctan x}{4} + C_m \quad x \in [m\pi, (m+1)\pi),$$

kde zbyva urcit uz jen hodnoty C_m. Tyto konstanty urcime tak, aby funkce F byla spojita na $\mathbb{R}$. Potrebujeme tedy, aby pro kazde $m \in \mathbb{Z}$ platilo $\lim_{x \to m\pi_+} F(x) = \lim_{x \to m\pi_-} F(x)$, coz znamena

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{(m\pi)^4}{4} \arctan(m\pi) - \frac{(m\pi)^3}{12} + \frac{(m\pi)}{4} - \frac{\arctan(m\pi)}{4} + C_m \\
&= \lim_{x \to m\pi_+} (-1)^m \left(\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} \right) + \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} + C_m \\
&= \lim_{x \to m\pi_+} F(x) = \lim_{x \to m\pi_-} F(x) \\
&= \lim_{x \to m\pi_-} (-1)^{m-1} \left(\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} \right) + \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} + C_{m-1} \\
&= -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{(m\pi)^4}{4} \arctan(m\pi) - \frac{(m\pi)^3}{12} + \frac{(m\pi)}{4} - \frac{\arctan(m\pi)}{4} + C_{m-1}
\end{aligned}$$

a vidime nutne, ze $C_m = C_{m-1} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$. Konecne zvolime C_0 tak, aby F byla licha funkce, a tedy tak, aby $F(0) = 0$, coz nakonec vede k $C_0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ a vysledne pro $x \in [m\pi, (m+1)\pi)$

$$F(x) = (-1)^m \left(\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} \right) + \frac{x^4}{4} \arctan x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{\arctan x}{4} + \left(\frac{2m+1}{3} - \frac{2m+1}{5} \right)$$

---

[1]

$$u' = x^3, \ u = x^4/4$$
$$v = \arctan x, \ v' = \frac{1}{1+x^2}$$