ÚVOD DO VARIAČNÍHO POČTU

Klasická (reálná) analýza (real analysis / differential calculus – diferenciální počet)

- zkoumá vlastnosti (reálných) **funkcí**
- objekt studia $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad d \geq 1$ $\quad$ FUNKCE

  $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$

  $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$
- mimojiné zkoumá **extrémy funkcí** (lokální minima / max.)

<u>Víme z 1. roč.:</u>

(1) Je-li $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, pak f nabývá v K minimum / maximum

(2) Je-li $f : \mathcal{U}(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
f má v x_0 extrém
a $f'(x_0)$ existuje $\Bigg\}$ pak $f'(x_0) = 0$

(3) Je-li $f : \mathcal{U}(x_0) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d > 1$,
f má v x_0 extrém,
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existují pro $i = 1, \dots, d$ $\Bigg\}$ pak $\nabla f(x_0) = 0$

$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = 0$

$\forall |\vec{v}| = 1$

Derivace f v $\vec{x}_0$ ve směru $\vec{v}$, $\quad \partial_{\vec{v}} f(x_0)$,
(směrová derivace f v x_0)
definovaná vztahem

$$\partial_{\vec{v}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

je koncept, který bude vhodný pro derivování v prostorech ∞-dimenze, tedy ve variačním počtu.

$\boxed{\text{Variační počet}}$ Calculus of variations

- zkoumá minima/maxima neboli $\boxed{\text{extremály funkcionálů}}$ ← kritické body

- objekt studia $\boxed{\text{funkcionál}}$ zobrazení z normovaného prostoru funkcí do $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L} : \left(X, \|\cdot\|_X\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Příklady prostorů } X}$
- $C(\langle a,b\rangle)$, $C^k(\langle a,b\rangle)$, ..., $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- $L^2((a,b))$, $L^p((a,b))$ Lebesgueovy prostory
- $W^{1,2}((a,b))$, $W^{k,p}((a,b))$ Sobolevovy prostory

Příklady funkcionálů a úloh variačního počtu

(1) Buď $\vec{\gamma} : [0,T] \to \mathbb{R}^s$ (křivka, trajektorie, pohyb, funkce)

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ geometr, fyzik, inženýr, matematik

(Funkcionál) $\boxed{\text{délka křivky}}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] := \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^{s} [\gamma_i'(t)]^2}\, dt$$

Speciálně $(s=2)$

- $\vec{\gamma}(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)$ zobecněné polární souřadnice

$\varphi \in \langle \alpha, \beta\rangle$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \mathcal{L}[r] = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

- Křivka daná grafem funkce $\langle\vec{\gamma}\rangle = \{(x, y(x));\ x \in (a,b)\}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \boxed{\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}$$

Uvažujme na chvíli jen tento funkcionál ↑.
Zformulujme tři minimalizační úlohy.

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx \ \text{existuje}}$$

$$\Updownarrow$$

DOLNÍ Riemannův $\int$ existuje & HORNÍ Riemannův $\int$ existuje

$$\sup_D \ s(D,f) \qquad\qquad \inf S(D,f)$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,(x_i - x_{i-1}) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{N} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

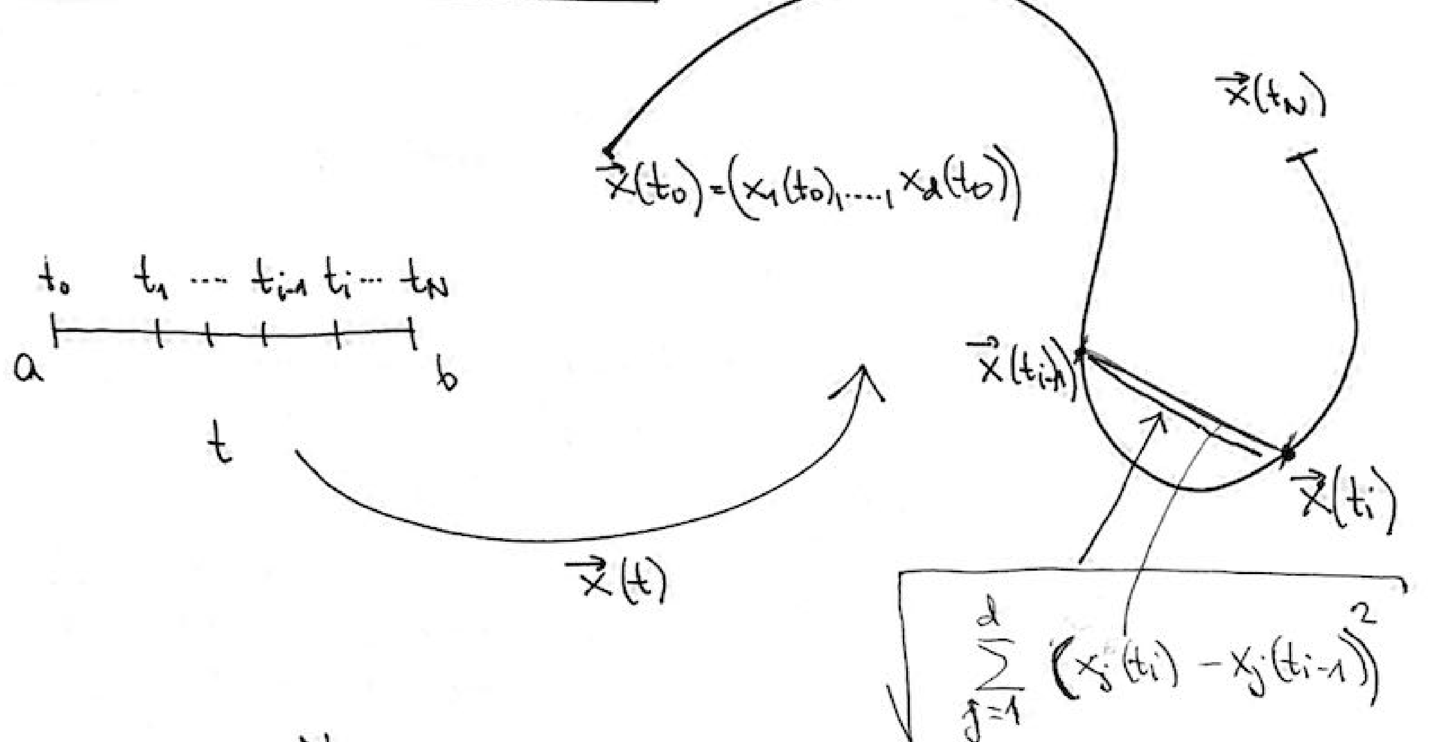
$$\inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \qquad\qquad \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})}$$

approximace Riemannova integrálu

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx} \approx \boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}$$

FUNKCIONÁLY DÉLKY KŘIVKY



$$L[\vec{x}] \approx \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2}$$

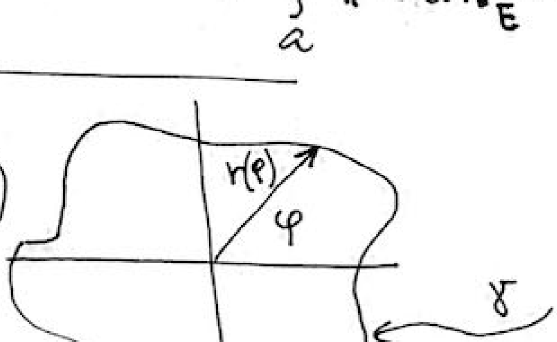
$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\xi_j)\right)^2}\,(t_i - t_{i-1}) \approx \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j'(t))^2}\,dt$$

$$= \int_a^b \|\vec{x}'(t)\|_E\,dt$$

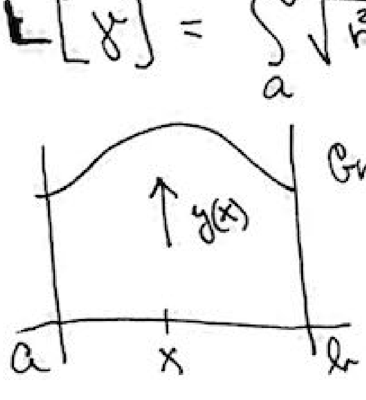
Speciálně

(i) $\varphi \in [a,b] \longmapsto (\underbrace{r(\varphi)\cos\varphi}_{x_1(\varphi)}, \underbrace{r(\varphi)\sin\varphi}_{x_2(\varphi)})$

$$\Rightarrow L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$



(ii)



Graf funkce

$x \in [a,b] \longmapsto [x, y(x)]$

$$L[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

Z

Tři úlohy (variačního počtu)

(i) Nalézt $\min\limits_{y \in X^1} \mathcal{L}[y]$, kde $X^1 = \{y \in C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b \rangle);\ y(a) = A,\ y(b) = B\}$

Úloha: nalézt nejkratší křivku spojující dva body $[a,A]$ a $[b,B]$

(ii) Nalézt $\min\limits_{y \in X^2} \mathcal{L}[y]$ $\quad X^2 = \{y \in Z;\ y(a) = A\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejmenší vzdálenost $[a,A]$ od přímky procházející body $[b,0]$ a $[b,B]$, $B \neq 0$.

(iii) Nalézt $\min\limits_{y \in X^3} \mathcal{L}[y]$ $\quad X^3 = \{y \in Z\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejkratší vzdálenost mezi dvěma přímkami danými body $[a,0], [a,A]$ resp. $[b,0], [b,B]$.

$V[y] := \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$

$P[y] := 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$

Funkcionály plochy, objemu rotačních těles; „$f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$"

(2) Klasická teoretická mechanika. Jedním z důležitých principů je HAMILTONŮV PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE:

pohyb $\left(\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))\right)$ Newtonova potenciálního systému daného rovnicemi

$$\frac{d}{dt}\left(m \frac{d\vec{x}}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m\dot{\vec{x}})^{\cdot} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{0}$$

se shoduje s kritickými body (extremálami) funkcionálu

$$\Phi[\vec{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, \vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) dt, \text{ kde}$$

$$L(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) \stackrel{df}{=} T(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) - U(\vec{x})$$

③ <u>Problém minimální plochy</u> $u(x,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$S[u] := \int_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx\,dy$$

$$\min_{\substack{u\in C^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)\\ u|_{\partial\Omega}=u_0}} S[u]$$

u_0 je daná funkce na hranici „bublifuk".

④

úloha: nalézt maximální plochu, kterou lze "uzavřít" provázkem dané délky, tj.

$$\max_{\substack{y\in X\\ \& \\ \mathcal{L}[y]=l>0}} \mathcal{S}[y]$$

$l>0$ dáno

$\boxed{\text{Úlohy ①}}$ zapadají do obecnější úlohy: nalézt $y\in X$ tak, že y je extremála (kritický bod) funkcionálu

$$\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$$

$$L : (a,b)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úlohy ②}}$ jsou úlohy typu: nalézt $\vec{y}\in X^s$ (tzn. $y_i\in X$, $i=1,\dots,s$) tak, že $\vec{y}$ je extremála funkcionálu

$$\phi[\vec{y}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \vec{y}(t), \dot{\vec{y}}(t))\, dt$$

$$L : (t_1,t_2)\times\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úloha ③}}$ patří mezi úlohy: nalézt $u\in X$ tak, že u je extremála

$$\Psi[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

$$L : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \quad \Omega\subset\mathbb{R}^d.$$

$\boxed{\text{Úloha ④}}$ je úloha typu ① s podmínkou, že jiný funkcionál $\Xi[y]=0$ (omezení). vazba

Teorie

Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ lineární (vektorový) ~~pro~~ prostor, který je normovaný a úplný $\equiv$ X je Banachův

- dim X, kde X je prostor funkcí, je nekonečno.
- $C^\infty((a,b)) \subset C^2((a,b)) \subset C(a,b)$ a C^∞ obsahuje polynomy libovolného stupně $\{1, x, x^2, \dots, x^k \dots\}$ $\Rightarrow$ dimenze těchto prostorů je ∞.

Def. Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 lokální $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$

$\overset{df}{\equiv}$ $\exists\, U_\delta(x_0) := \{x \in X;\ \|x - x_0\|_X < \delta\}$ tak, že $\phi(x_0) \left\{\begin{matrix}\geq\\ \leq\end{matrix}\right\} \phi(x)$ $\forall x \in U_\delta(x_0)$.

Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 ostré lokální $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$

$\overset{df}{\equiv}$ $\exists\, U_\delta(x_0)$ tak, že $\phi(x_0) \left\{\begin{matrix}>\\ <\end{matrix}\right\} \phi(x)$ pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$

$P_\delta(x_0) := \{x \in X;\ 0 < \|x - x_0\|_X < \delta\}$

Def. Řekneme, že $\phi: X \to \mathbb{R}$ má v x_0 derivaci Gateaux ve směru $h \in X$ (neboli ϕ je v x_0 Gateauxovsky diferencovatelná v $h \in X$) pokud existuje

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi[x_0 + th] - \phi[x_0]}{t}.$$ Tuto limitu značíme $\delta\phi[x_0](h)$.

Pozorujeme, že pro $g(t) := \phi(x_0 + th)$ lze $\delta\phi[x_0](h)$ zapsat ekvivalentně ve tvaru

$$\delta\phi[x_0](h) = \lim \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0}$$

Tedy derivování v X ∞-dimenze je redukováno na derivování funkce jedné reálné proměnné.

<u>Věta 1</u> (Nutná podmínka existence extremály)

Nechť $\Phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 extremálu a nechť $\delta\Phi[x_0](h)$ existuje pro každé $h \in X$.
Pak
$$\boxed{\delta\Phi[x_0](h) = 0 \quad \forall h \in X}$$

(Dk) Buď $h \in X$ libovolné, ale pevné. Zadefinujme fci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako výše, tedy
$$g(t) := \Phi(x_0 + th)$$
[Všimněme si, že $x_0 + th \in X$ díky linearity prostoru X]

Pak z předpokladů plyne, že

- g má v 0 extrém
- $g'(0)$ existuje.

Tedy dle věty z 1. roč. (nutná podmínka existence extrému fce reálné proměnné) je však $g'(0) = 0$, což však znamená, že
$$\delta\Phi[x_0](h) = 0.$$
Protože h bylo zvoleno libovolně, tvrzení je dokázáno. ▨

Uvažujme dále

$$\Phi[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$$

a řešme úlohu variačního počtu:

$$\boxed{\text{Nalézt } y_{min} \in X^i \text{ tak, že } \Phi[y_{min}] = \min_{y \in X^i} \Phi[y]}$$

$i = 1, 2, 3$

zde pro $Z = C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b \rangle)$:

$$X^1 = \{ z \in Z;\ z(a) = A,\ z(b) = B \}$$
$$X^2 = \{ z \in Z;\ z(a) = A \}$$
$$X^3 = \{ z \in Z \} = Z.$$

Příklady

(a) Úlohy v Příkladu (1) s funkcionálem délky křivky, kde
$$L(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$$

(b) V Příkladu (1) také
$$L(\varphi, r, r') = \sqrt{r^2 + (r')^2}$$

(c) Úloha o brachystochroně

χρονος – čas
βραχιστος – nejkratší

Natáhnout drátek mezi dvěma body (např. [0,0] a [a,b], a,b > 0) tak, aby korálek navlečený na drátek v bodě [a,b] doražil do počátku v nejkratším čase

Galileo Galilei (1637): otázka, zda lze najít natažení, po kterém se korálek dostane do počátku rychleji než po "přímce" spojující [0,0] a [a,b].

Johann Bernoulli (1.1.1697) předložil vědecké komunitě výzvu formou následujícího oznámení:

„Já, Johann Bernoulli, si dovoluji pozdravit nejchytřejší matematiky z celého světa. Nic nemůže být přitažlivější inteligentním lidem než čestný, vyzývavý a podnětný problém, jehož řešení přinese věhlas a slávu a zůstane navždy trvalým monumentálním dílem.
Následujíce příklady položené Pascalem, Fermatem a jinými, doufám, že získám ocenění celé vědecké komunity tím, že před ty nejlepší matematiky naší doby položím problém, který prověří jejich metody a sílu jejich intelektu. Pokud mi někdo předloží řešení navrženého problému, veřejně ho prohlásím za hodna výtečného ocenění a chvály.“

Minimalizovat $T[y]$ přes $\quad y \in C^1((0,a)) \cap C(\langle 0,a\rangle)$
$y(0)=0, \; y(a)=b$

kde

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{b-y(x)}}\, dx \qquad \text{(DÚ, cvičení)}$$

Tedy

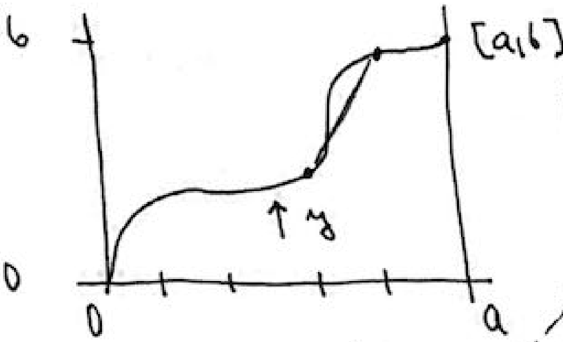
$$L(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(b-y)}}$$

Úloha o brachystochroně je podobná jiné úloze z optiky:
V dokonale průhledném prostředí s proměnným indexem lomu jsou dány dva body A a B.
Cíl: určit trajektorii světelného paprsku jdoucího z A do B.
Fermatův princip říká, že ze všech křivek spojujících A a B je trajektorie světelného paprsku ta, po které dospěje světlo z A do B v nejkratším čase.

Úloha o brachistochroně

χρονος ... čas
βραχιστος .... nejkratší

Cíl: Natáhnout drátek mezi počátkem [0,0] a bodem [a,b] tak, aby korálek navlečený v bodě [a,b] na drátek se dostal do počátku v nejkratším čase.



Drátek popsán funkcí $y : [0,a] \to \mathbb{R}$
$y(0) = 0$, $y(a) = b$.

čas, délka, rychlost přiřazené intervalu (t_{i-1}, t_i).

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i}{v_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{\left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2 + (x_i - x_{i-1})^2}}{v_i}$$

$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1 + \left(y'(\xi_i)\right)^2}}{v(\xi_i)} \, (x_i - x_{i-1})$$

Předpokládáme, že platí, že SOUČET KINETICKÉ A POTENCIÁLNÍ ENERGIE SE ZACHOVÁVÁ:

$$\frac{1}{2} m v^2(\xi_i) + m g y(\xi_i) = m g b$$

$$\Downarrow$$

$$v(\xi_i) = \sqrt{2g\,(b - y(\xi_i))}$$

Tedy

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1 + \left(y'(\xi_i)\right)^2}}{\sqrt{2g}\,\sqrt{b - y(\xi_i)}} \, (x_i - x_{i-1}) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}}{\sqrt{b - y(x)}} \, dx$$

$$T[y] = \int_a^b L\left(y(x), y'(x)\right) dx$$

ÚVOD DO VARIAČNÍHO POČTU

Klasická (reálná) analýza (real analysis, differential calculus – diferenciální počet)

- zkoumá vlastnosti (reálných) **funkcí**
- objekt studia $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad d \geq 1$ $\quad$ FUNKCE

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$$

- mimojiné zkoumá **extrémy funkcí** (lokální minima/max.)

Víme z 1. roč.:

(1) Je-li $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, pak f nabývá v K minimum/maximum

(2) Je-li $f: U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f má v x_0 extrém a $f'(x_0)$ existuje, pak $f'(x_0) = 0$

(3) Je-li $f: U(x_0) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d > 1$, f má v x_0 extrém, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existují pro $i = 1, \dots, d$, pak $\nabla f(x_0) = 0$

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall\, |\vec{v}| = 1$$

Derivace f v $\vec{x}_0$ ve směru $\vec{v}$, $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$,
(směrová derivace f v x_0)
definovaná vztahem

$$\partial_{\vec{v}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

je koncept, který bude vhodný pro derivování v prostorech ∞-dimenze, tedy ve variačním počtu.

$\boxed{\text{Variační počet}}$ Calculus of variations

kritické body

- zkoumá minima/maxima neboli $\boxed{\text{extremály funkcionálů}}$
- objekt studia $\boxed{\text{funkcionál}}$ zobrazení z normovaného prostoru funkcí do $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L} : (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Příklady prostorů } X}$

- $C(\langle a,b\rangle)$, $C^k(\langle a,b\rangle)$, ..., $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- $L^2((a,b))$, $L^p((a,b))$ Lebesgueovy prostory
- $W^{1,2}((a,b))$, $W^{2,p}((a,b))$ Sobolevovy prostory

Příklady funkcionálů a úloh variačního počtu

① Buď $\vec{\gamma} : [0,T] \to \mathbb{R}^s$ (křivka, trajektorie, pohyb, funkce)

geometr, fyzik, inženýr, matematik

(Funkcionál) $\boxed{\text{délka křivky}}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] := \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^{s} [\gamma_i'(t)]^2}\, dt$$

Speciálně $(s=2)$

- $\vec{\gamma}(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)$ zobecněné polární souřadnice
  $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \mathcal{L}[r] = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

- Křivka daná grafem funkce $\langle\vec{\gamma}\rangle = \{(x, y(x));\ x \in (a,b)\}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \boxed{\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}$$

Uvažujme na chvíli jen tento funkcionál. Zformulujme tři minimalizační úlohy.

$$\boxed{(R)\ \int_a^b f(x)\,dx \text{ existuje}}$$

$$\Updownarrow$$

DOLNÍ Riemannův $\int$ existuje & HORNÍ Riemannův $\int$ existuje

$$\sup_D \underbrace{s(D;f)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \,(x_i - x_{i-1})$$

$$\inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$$

$$\inf S(D;f)$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_i \,(x_i - x_{i-1})$$

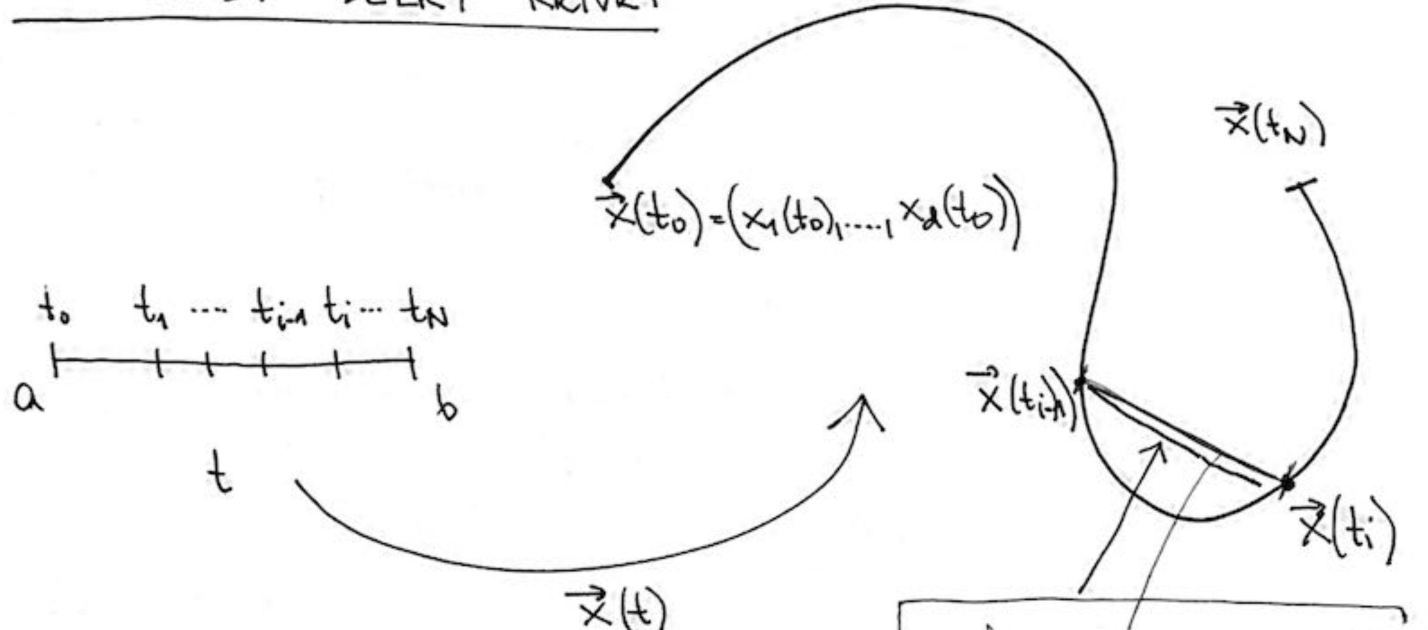
$$\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})}$$

approximace Riemannova integrálu

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx} \approx \boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})}$$

FUNKCIONÁLY DÉLKY KŘIVKY



$$\sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})\right)^2}$$

$$L[\vec{x}] \approx \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2}$$

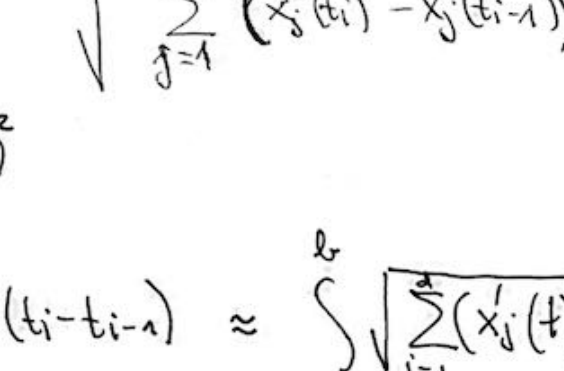
$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\xi_j)\right)^2}\;(t_i - t_{i-1}) \approx \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j'(t))^2}\,dt$$

$$= \int_a^b \|\vec{x}'(t)\|_E \,dt$$

Speciálně

(i) $\varphi \in [a,b] \longmapsto (\overbrace{r(\varphi)\cos\varphi}^{x_1(\varphi)}, \overbrace{r(\varphi)\sin\varphi}^{x_2(\varphi)})$

$$\Rightarrow \mathbf{L}[\gamma] = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$



(ii)

Graf funkce

$x \in [a,b] \longmapsto [x, y(x)]$

$$L[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

Tři úlohy (variačního počtu)

Z

(i) Nalézt $\min_{y \in X^1} \mathcal{L}[y]$, kde $X^1 = \{y \in C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b\rangle),\ y(a) = A,\ y(b) = B\}$

Úloha: nalézt nejkratší křivku spojující dva body $[a,A]$ a $[b,B]$

(ii) Nalézt $\min_{y \in X^2} \mathcal{L}[y]$ $\quad X^2 = \{y \in Z;\ y(a) = A\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejmenší vzdálenost $[a,A]$ od přímky procházející body $[b,0]$ a $[b,B]$, $B \neq 0$.

(iii) Nalézt $\min_{y \in X^3} \mathcal{L}[y]$ $\quad X^3 = \{y \in Z\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejkratší vzdálenost mezi dvěma přímkami danými body $[a,0],[a,A]$ resp. $[b,0],[b,B]$.

$V[y] := \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$

$P[y] := 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$

Funkcionály plochy, objemu rotačních těles; „ $f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$ "

(2) Klasická teoretická mechanika. Jedním z důležitých principů je HAMILTONŮV PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE:

pohyb $\left(\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))\right)$ Newtonova potenciálního systému daného rovnicemi

$$\frac{d}{dt}\left(m \frac{d\vec{x}}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m\dot{\vec{x}})^{\cdot} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{0}$$

se shoduje s kritickými body (extremálami) funkcionálu

$$\Phi[\vec{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, \vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) dt, \text{ kde}$$

$$L(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) \stackrel{df}{=} T(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) - U(\vec{x})$$

③ Problém minimální plochy $u(x,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$S[u] := \int_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dxdy$$

$$\min_{\substack{u\in C^1(\Omega)\cap C(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = u_0}} S[u]$$

u_0 je daná funkce na hranici „bublifuk".

④

Úloha: nalézt maximální plochu, kterou lze „uzavřít" provázkem dané délky, tj:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\ \mathcal{S}[y] \\ y\in X \\ \& \\ \mathcal{L}[y] = l > 0 \end{array}}$$

$l>0$ dáno

$\boxed{\text{Úlohy ①}}$ zapadají do obecnější úlohy: nalézt $y\in X$ tak, že y je extremála (kritický bod) funkcionálu

$$\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$$

$$L : (a,b)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úlohy ②}}$ jsou úlohy typu: nalézt $\vec{y}\in X^s$ (tzn. $y_i\in X$, $i=1,\dots,s$) tak, že $\vec{y}$ je extremála funkcionálu

$$\phi[\vec{y}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \vec{y}(t), \dot{\vec{y}}(t))\, dt$$

$$L : (t_1,t_2)\times\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úloha ③}}$ patří mezi úlohy: nalézt $u\in X$ tak, že u je extremála

$$\Psi[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

$$L : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \quad \Omega\subset\mathbb{R}^d.$$

$\boxed{\text{Úloha ④}}$ je úloha typu ① s podmínkou, že jiný funkcionál $\Xi[y] = 0$ (omezení). vazba

$\boxed{\text{Teorie}}$

Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ lineární (vektorový) ~~pr~~ prostor, který je normovaný a úplný $\equiv$ X je Banachův

Γ
- $\dim X$, kde X je prostor funkcí, je nekonečno.
- $C^\infty((a,b)) \subset C^k((a,b)) \subset C((a,b))$ a C^∞ obsahuje polynomy libovolného stupně $\{1, x, x^2, \dots, x^k \dots\}$ $\Rightarrow$ dimenze těchto prostorů je ∞. $\lrcorner$

Def. Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 lokální $\left\{\begin{array}{c}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{array}\right\}$

$$\overset{\text{df}}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) := \{x \in X;\ \|x - x_0\|_X < \delta\} \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{array}{c}\geq\\ \leq\end{array}\right\} \phi(x) \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 ostré lokální $\left\{\begin{array}{c}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{array}\right\}$

$$\overset{\text{df}}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{array}{c}>\\ <\end{array}\right\} \phi(x) \text{ pro všechna } x \in P_\delta(x_0)$$

$$P_\delta(x_0) := \{x \in X;\ 0 < \|x - x_0\|_X < \delta\}$$

Def. Řekneme, že $\phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 derivaci Gateaux ve směru $h \in X$ (neboli ϕ je v x_0 Gateauxovsky diferencovatelná v $h \in X$) pokud existuje

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi[x_0 + th] - \phi[x_0]}{t}.$$

Tuto limitu značíme $\delta\phi[x_0](h)$.

Γ Pozorujeme, že pro $g(t) := \phi(x_0 + th)$ lze $\delta\phi[x_0](h)$ zapsat ekvivalentně ve tvaru

$$\delta\phi[x_0](h) = \lim \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0}$$

Tedy derivování v X ∞-dimenze je redukováno na derivování funkce jedné reálné proměnné.

<u>Věta 1</u> (Nutná podmínka existence extremály)

Nechť $\phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 extremálu a nechť $\delta\phi[x_0](h)$ existuje pro každé $h \in X$.

Pak $\boxed{\delta\phi[x_0](h) = 0 \quad \forall h \in X}$

(Dk) Buď $h \in X$ libovolné, ale pevné. Zadefinujme fci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako výše, tedy

$$g(t) := \phi(x_0 + th)$$ [Všimněme si, že $x_0 + th \in X$ díky linearity prostoru X]

Pak z předpokladů plyne, že

- g má v 0 extrém
- $g'(0)$ existuje.

Tedy dle věty z 1. roč. (nutná podmínka existence extrému fce reálné proměnné) je však $g'(0) = 0$, což však znamená, že

$$\delta\phi[x_0](h) = 0.$$

Protože h bylo zvoleno libovolně, tvrzení je dokázáno. ▨

$$L(\cdot,\cdot,\cdot) = \sqrt{1+(y')^2}$$

$$L = y^2(x)$$

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}}$$

$$L = x\, y'^2(x)$$

Uvažujme dále

$$\phi[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$$

a řešme úlohu variačního počtu:

$$\boxed{\text{Nalézt } y_{min} \in X^i \text{ tak, že } \phi[y_{min}] = \min_{y \in X^i} \phi[y]}$$

$i = 1, 2, 3$

zde pro $Z = \underbrace{C^1(\langle a,b\rangle) \cap C(\langle a,b\rangle)}_{C^1(\langle a,b\rangle)}$:

$$X^1 = \{z \in Z;\ z(a) = A,\ z(b) = B\}$$
$$X^2 = \{z \in Z;\ z(a) = A\}$$
$$X^3 = \{z \in Z\} = Z.$$

Příklady (a) Úlohy v Příkladu (1) o funkcionálem délky křivky, kde

$$L(x, y, y') = \sqrt{1+(y')^2}$$

(b) V Příkladu (1) také

$$L(\varphi, r, r') = \sqrt{r^2 + (r')^2}$$

(c) Úloha o brachystochroně

χρονος – čas

βραχιστος – nejkratší

Natáhnout drátek mezi dvěma body (např. [0,0] a [a,b], a,b > 0) tak, aby korálek navlečený na drátek v bodě [a,b] dorazil do počátku v nejkratším čase

Galileo Galilei (1637): otázka, zda lze najít natažení, po kterém korálek dorazí do počátku rychleji než po "přímce" spojující [0,0] a [a,b].

Johann Bernoulli (1.1.1697) předložil vědecké komunitě výzvu formou následujícího oznámení:

„Já, Johann Bernoulli, si dovoluji pozdravit nejchytřejší matematiky z celého světa. Nic nemůže být přitažlivější inteligentním lidem než čestný, vyzývavý a podnětný problém, jehož řešení přinese věhlas a slávu a zůstane navždy trvalým monumentálním dílem.
Následujíce příklady položené Pascalem, Fermatem a jinými, doufám, že získám ocenění celé vědecké komunity tím, že před ty nejlepší matematiky naší doby položím problém, který prověří jejich metody a sílu jejich intelektu. Pokud mi někdo předloží řešení navrženého problému, veřejně ho prohlásím za hodna výtečného ocenění a chvály."

Minimalizovat $T[y]$ přes $y \in C^1((0,a)) \cap C(\langle 0,a \rangle)$
$y(0)=0$, $y(a)=b$

kde

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{b-y(x)}}\, dx \qquad (\text{DÚ, cvičení})$$

Tedy

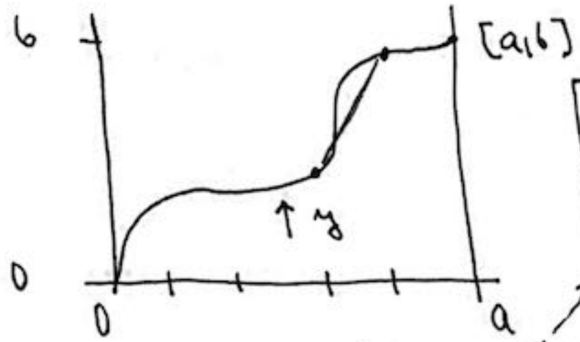
$$L(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(b-y)}}$$

Úloha o brachystochroně je podobná jiné úloze z optiky:
V dokonale průhledném prostředí s proměnným indexem lomu jsou dány dva body A a B.
Cíl: určit trajektorii světelného paprsku jdoucího z A do B.
Fermatův princip říká, že ze všech křivek spojujících A a B je trajektorie světelného paprsku ta, po které dospěje světlo z A do B v nejkratším čase.

Úloha o brachistochroně

χρονος ... čas
βραχιστος .... nejkratší

<u>Cíl</u>: Natáhnout drátek mezi počátkem $[0,0]$ a bodem $[a,b]$ tak, aby korálek navlečený v bodě $[a,b]$ na drátek se dostal do počátku v nejkratším čase.



Drátek popsán funkcí $y : [0,a] \to \mathbb{R}$
$y(0) = 0$, $y(a) = b$.

čas, délka, rychlost přiřazené intervalu (t_{i-1}, t_i).

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i}{v_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{\left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2 + \left(x_i - x_{i-1}\right)^2}}{v_i}$$

$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1 + \left(y'(\xi_i)\right)^2}}{v(\xi_i)} \quad (x_i - x_{i-1})$$

Předpokládáme, že platí, že SOUČET KINETICKÉ A POTENCIÁLNÍ ENERGIE SE ZACHOVÁVÁ:

$$\frac{1}{2} m v^2(\xi_i) + m g y(\xi_i) = m g b$$

$$\Downarrow \quad v(\xi_i) = \sqrt{2g\,(b - y(\xi_i))}$$

Tedy

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1 + \left(y'(\xi_i)\right)^2}}{\sqrt{2g}\,\sqrt{b - y(\xi_i)}} (x_i - x_{i-1}) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}}{\sqrt{b - y(x)}} dx$$

$$T[y] = \int_a^b L(y(x), y'(x))\, dx$$

Pro $\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$ chceme spočítat $\delta\Phi[y](h)$ a nalézt charakterizaci (tj. ekvivalentní popis) podmínky $\delta\Phi[y](h) = 0$ pro $\forall h \in X$ z Věty 1.

Protože $\delta\Phi[y](h) = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$, linearita prostoru X je nutná, aby $y+th$ pro t libovolné ležělo v prostoru, kde hledám řešení. Zatímco prostor X^3 ze strany 7 je lineární, prostory X^1 a X^2 lineární obecně nejsou! (jen pro $A=B=0$) Pro $i=1,2$ hledáme y ve tvaru $y_0 + \xi$, kde y_0 je nějaká (jednoduchá, hladká) funkce splňující $y_0(a) = A$ a $y_0(b) = B$ pro $i=1$ a $y_0(a) = A$ pro $i=2$.

Pro $i=1,2$ pak přepíšeme minimalizační úlohu do tvaru

nalézt $y_{min} \in X^i$ tak, že $\Phi[y_{min}] = \min_{\xi \in X_0^i} \Phi[y_0 + \xi]$,

kde $X_0^1 = \{z \in Z;\ z(a) = z(b) = 0\}$

a $X_0^2 = \{z \in Z;\ z(a) = 0\}$.

Spočteme nyní pro libovolné $h \in X_0^i$ (pro $i=3$ $X_0^3 = X^3 = Z$)

$$\delta\Phi[y](h) = \delta\Phi[\overbrace{y_0+\xi}^{y}](h) = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$$

Máme

$$\delta\Phi[y](h) = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}\int_a^b L(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x))\,dx\Big|_{t=0}$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left\{ L(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x)) \right\} dx \Big|_{t=0}$$

$\frac{d}{dt}\int_a^b \dots dt \overset{?}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} \dots dt$

záměna derivace a integrace

$$= \int_a^b \Big[\frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x))\, h(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x))\, h'(x) \Big] dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\, h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x))\, h(x)\, dx$$

zde bychom mohli výpočet ukončit. My však upravíme první výraz integrací per partes na tvar $\int_a^b g(x)h(x)$

$$= \int_a^b \left\{ \left(- \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) \right\} h(x)\, dx + \left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\, h(x) \right]_a^b$$

Poslední člen
$$\begin{cases} = 0 \quad \text{pro } \boxed{i=1} \text{ neb pro } h \in X_0^1 \text{ platí } h(a) = h(b) = 0; \\ = \frac{\partial L}{\partial y'}(b, y(b), y'(b))\, h(b) \quad \text{pro } \boxed{i=2} \text{ neboť } h(a) = 0; \\ = \frac{\partial L}{\partial y'}(b, y(b), y'(b))\, h(b) - \frac{\partial L}{\partial y'}(a, y(a), y'(a))\, h(a) \quad \text{pro } \boxed{i=3} \end{cases}$$

K charakterizaci podmínky $\boxed{\delta\Phi[y](h) = 0 \text{ pro } \forall h \in X_0^i}$ využijeme následující fundamentální lemma variačního počtu.

Lemma Buď $f \in C((a,b))$ splňující $\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0$ pro všechna $h \in [C_0(\langle a,b\rangle)]_0 = \{z \in C(\langle a,b\rangle);\ z(a)=z(b)=0\}$.

Pak $f \equiv 0$.

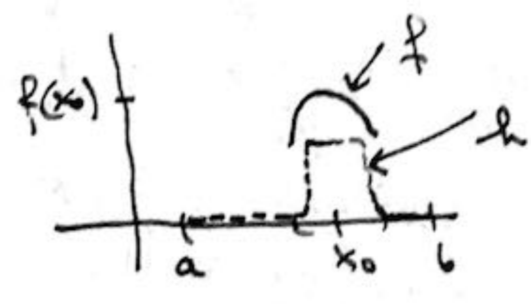
Poznámky 1) Lemma zobecňuje tvrzení: $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ splňující $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ pro libovolné $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ je nutně nulový vektor.

Dk Vol $\vec{b} = \vec{a}$, pak $|\vec{a}|^2 = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$. ∎

2) Kdyby ve znění lemmatu bylo „$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0$ pro $h \in C((a,b))$", pak by opět stačilo vzít $h=f$ a z $\int_a^b f^2(x)\,dx$ plyne $f \equiv 0$.

$\boxed{\text{Dk Lemmy}}$ Sporem. Nechť $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) \neq 0$. BÚNO $f(x_0) > 0$. Ze spojitosti f plyne existence $U_\delta(x_0)$ tak, že $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ na $U_\delta(x_0)$, viz obrázek. Volme h jako na obrázku, pak

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)h(x)\,dx > 0,$$ což je ↯ ∎



Věta 2 (Charakterizace podmínky „$\delta\Phi[y](h)=0$ pro $\forall h\in X_0^i$"; vztah variačního počtu a řešení ODR)

$y\in X^i$ splňuje $\delta\Phi[y](h)=0$ pro $\forall h\in X_0^i$ $\iff$ $y\in X^i$ řeší

$$\boxed{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)'+\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')=0}$$

a navíc pro $i=2$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))=0$

a pro $i=3$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))=\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))=0$

Tato rovnice se nazývá $\boxed{\text{Euler-Lagrangeova rovnice}}$ (E-L) funkcionálu Φ

(Dk) „$\Leftarrow$" plyne z výpočtu na straně 9 a 10 použitím dosazením.

„$\Rightarrow$" z výpočtu na str. 9 a 10 plyne, že

$0=\delta\Phi[y](h)=0$ pro $h\in X_0^i$ implikuje

$$(*)\quad\left\{\begin{aligned}0=&\int_a^b\left\{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)'+\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\right\}h(x)\\&+\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))h(b)-\frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))h(a)\end{aligned}\right.$$

pro $h\in X_0^i$

ZA PŘEDPOKLADU

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)'+\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\in C(\langle a,b\rangle)$$

a volbou $h\in X_0^1\subsetneq X_0^2\subseteq X_0^3=X^3$, plyne z (*)

a fundamentálního lemmatu Euler-Lagr. rovnice, tj:

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)'+\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')=0.$$

Pro $i=1$ je tvrzení dokázáno. Pro $i=2$ nebo 3, dosadíme (E-L) do (*) a dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))\,h(b)=0 \qquad \forall h\in X_0^2\subset X^3$$

což implikuje

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))=0.$$

Dosadíme-li pro $i=3$ výše uvedenou podmínku a (E-L) do (*) dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))\,h(a)=0 \qquad \text{pro } \forall h\in X_3,$$

což implikuje

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))=0.$$

Věta 2 je tak dokázána. ∎

POZOROVÁNÍ (důležité)

(1) Pokud L nezávisí explicitně na y, pak plyne z (E-L):

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y'(x)) = \text{const.}}$$

(2) Pokud L nezávisí explicitně na x, pak

$$(***) \qquad \boxed{L(y,y') - \frac{\partial L}{\partial y'}(y,y')\,y' = \text{const.}}$$

(Dk) Derivuj (***) vzhledem k x. Pak

stejné členy s opačnými znaménky

$$\left(L(\dots)-\frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\,y'\right)' = \frac{\partial L}{\partial y}(\dots)\,y' + \frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\,y'' - \frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\,y'' + \left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\right)' y'$$

$$= \left\{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(\dots)\right\} y' \underset{\text{(E-L)}}{=} 0$$

∎

Shrnutí $\quad \Phi[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$

$$\boxed{\delta\Phi[y,h] = 0 \quad \forall h \in X} \quad \text{BANACHŮV}$$

$$\Updownarrow$$

Pečlivěji a přesněji: okrajové podmínky

$$\boxed{0 = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x))\,\underline{h(x)} + \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\,\underline{h'(x)} \quad \forall h \in X}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y, y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') = 0 \quad \text{Euler-Lagrange}}$$

$$\Downarrow$$

Zjednodušení (integrace)

1. <u>L nezávisí na y</u> $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y, y') = \text{const}}$

2. <u>L nezávisí na x</u> $\Rightarrow$

$$\boxed{L(y, y') - \frac{\partial L}{\partial y'}(y, y')\,y' = \text{const.}}$$

$$\delta\Phi[x_0](h) \overset{\text{def.}}{=} g'(t)\Big|_{t=0} \qquad \text{kde } \underbrace{g(t) := \Phi[x_0+th]}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$$

$$\delta^{2}\Phi[x_0](h,h) \overset{\text{def.}}{=} g''(t)\Big|_{t=0}$$

$=: \Psi_h[x_0]$ a $\delta^2\Phi[x_0](h,k) = \delta\Psi_h[x_0](k)$

a analogicky definuji $\delta^{(k)}\Phi[x_0](h_1,\dots,h_k)$

Definice Gateaux derivací vyšších řádů

$$\boxed{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Gateaux diferenciál}}}{\delta\Phi[x_0]} : h \longmapsto \delta\Phi[x_0](h) \quad \text{je lineární funkcionál}}$$

- **Definice** Řekneme, že $\Phi[y]$ má v $y\in X$ Fréchetův diferenciál $\equiv$ $\exists$ lineární zobrazení $L: X\to\mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{\|h\|_X\to 0} \frac{\Phi[y+h]-\Phi[y]-\underset{\substack{\uparrow\\ \delta\Phi[x_0]}}{L}h}{\|h\|_X} = 0$$

Analogie k $df(x_0)$

Zopakování znalostí pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ Sekce 4.1–4.3

- $f \in C(\langle a,b \rangle) \Rightarrow \exists\, x_{min}, x_{max} \in \langle a,b \rangle$
  $$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \quad \forall x \in \langle a,b \rangle$$
- $\left.\begin{array}{l} f \text{ má v } x_0 \text{ extrém} \\ f'(x_0) \text{ existuje} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$
- silný nástroj: INTERVALY MONOTONIE
- $f'(x_0) = 0$ a $\left\{\begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ má v x_0 ostré $\left\{\begin{array}{l} \text{max} \\ \text{min} \end{array}\right.$
- konvexita/konkávita a vztah k 2. derivaci

$\boxed{f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}}$ Sekce 8.5 - 8.6

- $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní $\Rightarrow$ $\exists\, x_{min}, x_{max} \in K$
  $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$
  $\forall x \in K$

- $\left.\begin{array}{l} f \text{ má v } x_0 \text{ extrém} \\ f \text{ má v } x_0 \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow$
  - $\nabla f(x_0) = \vec{0}$ d podmínek
  - $\partial_h f(x_0) = 0$ $\forall h \in \mathbb{R}^d$

derivace ve směru

- f má v x_0 totální dif. existuje-li lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\lim_{|h|_{\mathbb{R}^d} \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Lh}{|h|_{\mathbb{R}^d}} = 0$$

Kandidát na $L =: df(x_0)$: $Lh = \nabla f(x_0) \cdot h = \partial_h f(x_0)$

- $\left.\begin{array}{l} f \in C^2(U_\delta(x_0)) \\ \nabla f(x_0) = 0 \\ d^2 f(x_0)(h,h) \left\{\begin{array}{l} \text{positivně} \\ \text{negativně} \end{array}\right\} \text{definitní} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ má v x_0 ostré lokální $\left\{\begin{array}{l} \text{max.} \\ \text{min} \end{array}\right.$

$d^{(2)}f(x_0)(h,h)$ POSITIVNĚ DEFINITNÍ $\overset{df.}{\equiv}$

$$\boxed{d^{(2)}f(x_0)(h,h) > 0 \quad \forall h \neq 0}$$

$\exists \alpha > 0$ $\Updownarrow$

$$\boxed{d^{(2)}f(x_0)(h,h) \geq \alpha |h|^2} \quad \forall h \neq 0$$

$\underline{\mathbb{R}^d}$ a kompaktnost jednotkové sféry podstatná

$\vdash$ $\boxed{\phi : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}}$

<u>Tvrzení</u> (Postačující podmínka)

- $\delta\phi[x_0](h) = 0 \quad \forall h \in X$
- $\delta^2\phi[x](h,h) \geq 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) := \{z \in X ; \|z - x_0\|_X < \delta\}$

$\Rightarrow \phi$ má v x_0 lokální minimum.

Dk $\phi[x_0+h] - \phi[x_0] = g(1) - g(0) =$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} g'(0) + \tfrac{1}{2}g''(\xi)$$

$\xi \in (0,1)$

$$= 0 + \underbrace{\tfrac{1}{2}\delta^2\phi[\xi](h,h)}_{\geq 0} \quad \text{pro } \forall h : \|h\|_X < \delta$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi[x_0] \leq \phi[x_0+h] \qquad — \| —}$$

Def (Konvexita ϕ) • X normovaný lineární, $M \subset X$ konvexní.

• $\phi : X \to \mathbb{R}$ je na M KONVEXNÍ $\stackrel{\text{df.}}{=}$

$$\forall x, y \in M, \forall \lambda \in [0,1]:$$

$$\Phi[\lambda x + (1-\lambda) y] \leq \lambda \phi[x] + (1-\lambda) \phi[y]$$

Tvrzení (Další postačující podmínka)

• $\phi : X \to \mathbb{R}$ konvexní na X

• $\delta\phi[x_0](h) = 0 \quad \forall h \in X$

$\Rightarrow$ x_0 je bod globálního minima

Dk Kdyby existoval $x \in X$ tak, že

$\phi[x] < \phi[x_0]$, pak

$$\frac{\phi[x_0 + t(x - x_0)] - \phi[x_0]}{t} = \frac{\phi[tx + (1-t)x_0] - \phi[x_0]}{t}$$

$$\stackrel{\text{konvexita}}{\leq} \frac{t\phi[x] + (1-t)\phi[x_0] - \phi[x_0]}{t}$$

$$= \phi[x] - \phi[x_0] < 0.$$

$\underset{t \to 0}{\Rightarrow} \quad \delta\phi[x_0](x - x_0) < 0$, což je ↯ ▥

Témata 3. přednášky z ÚVODU DO VARIAČNÍHO POČTU

- Terminologie : Gateaux derivace Φ v x_0 ve směru
  Gateaux diferenciál
  Frechétův diferenciál

- (Další) nutné a postačující podmínky existence minimizéru

- Hladkost L, y v $\Phi[y] = \int_a^b L(x,y,y')\,dx$

- Dořešení úlohy 1 (i)-(iii).

LITERATURA : Pokorný - přednášky formou videozáznamu
Kopáček II - MAF (2003), kap. 11
B. Dacorogna : Introduction to Calculus of Variations
Imperial College Press, 3. vydání (2015)

Terminologie $x_0 \in X$ lineární

- $$\delta\Phi[x_0](h) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi[x_0+th]-\Phi[x_0]}{t} \quad \text{pro } h \in X$$

Gateaux derivace Φ v x_0 ve směru h

Pozn. $\delta\Phi[x_0](h)$ = variace (Calculus of variations)

- $\delta\Phi[x_0] : h \longmapsto \delta\Phi[x_0](h)$ tj. zobrazení $X \to \mathbb{R}$

je lineární funkcionál — Gateaux diferenciál

- Φ má v $x_0 \in X$ Frechétův diferenciál pokud existuje lineární zobrazení, označme jej $d\Phi[x_0]$, z $X \to \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{\|h\|_X\to 0} \frac{\Phi[x_0+h]-\Phi[x_0]-d\Phi[x_0](h)}{\|h\|_X} = 0$$

Platí (podobně jako v $\mathbb{R}^d$): Existuje-li $d\Phi[x_0]$, pak existuje $\delta\Phi[x_0]$ a rovnají se.

Pozn. Studiem matematických vlastností lin. funkcionálů vznikla část matematiky - funkcionální analýza

Nutné a postačující podmínky existence extremál

Buď $L \in C^2(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ a $\phi[y] \overset{df}{=} \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$

a

nalézt $y \in X$:

$$\phi[y] = \inf_{\xi \in X} \phi[\xi] \qquad (P)$$

Dostáváme následující variantu Věty 2.

Věta 2*

(1) Existuje-li minimizér $y \in Z \cap C^2(\langle a,b\rangle)$ úlohy (P), pak nutně

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0 \qquad \text{(E-L)}$$

neboli

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x,y,y')\, y'' - \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y}(x,y,y')\, y' - \frac{\partial L}{\partial y' \partial x}(x,y,y') + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0$$

(2) Naopak, je-li y řešením (E-L) a

$(y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ je konvexní pro $\forall x \in [a,b]$

pak y je minimizér (P)

(3) Je-li navíc $(y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ striktně konvexní pro $\forall x \in [a,b]$,

pak je minimizér, pokud existuje, jediný.

Pozn. • Řešení (E-L) se obecně nazývají kritické (stacionární) body.

• Požadavek na hladkost minimizéru je příliš silné, nemusí být ani C^1.

Platí $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je (striktně) konvexní $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^m$ $(x \neq y)$ a $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \underset{(<)}{\leq} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Je-li $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$, pak jsou ekvivalentní:

(i) f je konvexní

(ii) $f(x) \geq f(y) + \nabla f(y) \cdot (x-y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^m$

(iii) $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x-y) \geq 0 \qquad$ —''—

Je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$,

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\nabla^{(2)} f(x)\, v \cdot v \geq 0 \qquad \forall x, v \in \mathbb{R}^m$

Zformulujeme a dokážeme malinko obecnější tvrzení:

Věta 8.32 Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a konvexní. Platí:

* Je-li $f \in C^1(\Omega)$, pak jsou ekvivalentní
  (i) f je konvexní v Ω
  (ii) $\underbrace{E(x,y) := f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y-x)}_{\text{Weierstrassova fce}} \geq 0 \quad \forall x,y \in \Omega$
  (iii) ∇f je monotónní v Ω: $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (y-x) \geq 0$ pro $\forall x,y \in \Omega$

** Je-li $f \in C^2(\Omega)$, pak
  (i) $\Longleftrightarrow$ (iv) $\nabla^{(2)} f$ je v Ω pozitivně definitní tzn.
$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, z_i z_j \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^d \quad \forall x \in \Omega$$

Dk $\boxed{\text{Ad } *}$ Nejdříve pro $x_0, x_1 \in \Omega$ definujme
$$\boxed{g(t) := f(x_t)} \quad \text{kde } x_t := (1-t)x_0 + t x_1 \in \Omega \text{ pro } 0 \leq t \leq 1.$$

Pak $g'(t) = \nabla f(x_t) \cdot (x_1 - x_0)$

Z konvexity f (tj. (i)) plyne konvexita g, Vskutku: pro $\alpha \in [0,1]$
$$g((1-\alpha)s + \alpha t) = f((1-\alpha)x_s + \alpha x_t) \leq (1-\alpha) f(x_s) + \alpha f(x_t) = \underline{(1-\alpha) g(s) + \alpha g(t)}$$

Speciálně pro $\varepsilon \in (0,1)$
$$g(\varepsilon) = g((1-\varepsilon)0 + \varepsilon 1) \leq (1-\varepsilon) g(0) + \varepsilon g(1) \Rightarrow \frac{g(\varepsilon) - g(0)}{\varepsilon} \leq g(1) - g(0).$$

Pro $\varepsilon \to 0+$: $g'(0) \leq g(1) - g(0)$, což implikuje $\boxed{E(x_0, x_1) \geq 0}$ a (ii) platí

Je-li $E(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \Omega$, pak
$$0 \leq E(x_0, x_1) + E(x_1, x_0) = (\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0)) \cdot (x_1 - x_0) \geq 0$$
a (iii) platí.

Jestliže (iii) platí, pak g' je také monotónní neboť
$$g'(t) - g'(s) = \frac{(\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s)) \cdot (x_1 - x_0)}{t-s} \geq 0 \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq 1$$

$\Rightarrow$ g' je neklesající a
$$\underbrace{(1-\alpha)(g(\alpha) - g(0))}_{} = (1-\alpha) \int_0^\alpha g'(t)\,dt \leq (1-\alpha)\alpha g'(\alpha) \leq \alpha \int_\alpha^1 g'(t)\,dt$$
$$= \alpha(g(1) - g(\alpha)) \Rightarrow \underline{g(\alpha) \leq (1-\alpha) g(0) + \alpha g(1)}$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x_\alpha) \leq (1-\alpha) f(x_0) + \alpha f(x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in \Omega$$
což je (i).

$\boxed{\text{Ad } **}$ Je-li f konvexní, pak dle (iii')

$$0 \leq \frac{1}{\varepsilon} z \cdot \left(\nabla f(x+\varepsilon z) - \nabla f(x)\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} z \cdot \nabla^2 f(x) z$$

$\forall x \in \Omega$

tedy $\nabla^2 f(x)$ je positivně definitní

<u>Naopak</u> Je-li $\nabla^2 f(x)$ positivně definitní $\forall x, y \in \Omega$, pak

$$\left(\nabla f(x) - \nabla f(y)\right) \cdot (x-y) = \int_0^1 \frac{d}{ds} \nabla f(y+s(x-y))\, ds \cdot (x-y)$$

$$= \int_0^1 \nabla f^{(2)}(y+s(x-y))(x-y) \cdot (x-y)\, ds \geq 0.$$

a dle (iii') je f konvexní.

$\boxed{\text{Dk Věty } 2^*}$ $\boxed{\text{Ad (1)}}$ již dočítáno. Stručně ještě jednou:

Je-li y minimizér Φ přes všechny body v X, pak

$$\Phi[y] \le \Phi[y+th] \qquad \forall h\in X \quad \text{a } t\in\mathbb{R}$$

Neboli pro lib. $h\in X$

$$g(t) := \Phi[y+th] \quad \text{má v } 0 \text{ extrém a tedy}$$

$$g'(0)=0 \Leftrightarrow \delta\Phi[y](h)=0.$$

Avšak $\quad \delta\Phi[y](h)=0 \qquad \forall h\in X$

$\Updownarrow$

tzv. slabá forma (E-L) rovnic

$$\boxed{\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}(x,y(x),y'(x))h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y(x),y'(x))\,h(x) \quad dx = 0 \qquad \forall h\in X}$$

$\Updownarrow$ „dostatečná hladkost funkcí"

$$\int_0^a \left[-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\right] h(x)\,dx = 0 \qquad \forall h;\ h(a)=h(b)=0$$

$\Downarrow$ Fund. lemma VP

(E-L) $\qquad\qquad\qquad\qquad \blacksquare$

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Z ekvivalentní charakterizace konvexity $(y,z)\to L(x,y,z)$:

$$L(x,y+h,y'+h') \ge L(x,y,y') + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\,h + \frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\,h'$$

$\int_a^b \dots dx \Rightarrow$

$$\Phi[y+h] \ge \Phi[y] + \underbrace{\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\,h' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\,h\right] dx}_{=0 \ \text{slabá forma (E-L)}}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi[y+h] \ge \Phi[y] \qquad \forall h\in X.$$

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Nechť y a $\bar{y}$ jsou dva minimizéry. Definujme

$$\hat{y} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\bar{y} \quad . \qquad \text{zřejmě } \hat{y} \in X.$$

z konvexity L vzhledem k y, z:

$$L(x,\hat{y},\hat{y}') = L\left(x, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\bar{y}, \tfrac{1}{2}y' + \tfrac{1}{2}\bar{y}'\right) \leq \frac{L(x,y,y')}{2} + \frac{L(x,\bar{y},\bar{y}')}{2}$$

Tedy po integraci $\int_a^b dx$

$$\inf \leq \Phi[\hat{y}] \leq \frac{1}{2}\Phi[y] + \frac{1}{2}\Phi[\bar{y}] = \inf$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b \Big[\underbrace{\frac{L(x,y,y')}{2} + \frac{L(x,\bar{y},\bar{y}')}{2} - L\left(x, \frac{y+\bar{y}}{2}, \frac{y'+\bar{y}'}{2}\right)}_{\geq 0 \ \& \ >0 \text{ pokud } y \neq \bar{y}}\Big] dx = 0$$

Tedy nutně $y = \bar{y}$ ☺

$\boxed{\text{ŘEŠENÍ ÚLOHY 1 (i) – (iii)}}$

$$\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx \qquad \text{Tedy } L(x,y,z) = L(z) = \sqrt{1+z^2}$$

(i) $X^1 = \{z \in C^1(\langle a,b\rangle);\ \boxed{z(a)=A}, \boxed{z(b)=B}\}$ Dvě Dirichletovy podmínky

(ii) $X^2 = \{z \in C^1(\langle a,b\rangle);\ z(a) = A\}$ 1 Dirichletova podmínka, 1 Neumannova – $\frac{\partial L}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) = 0$

(iii) $X^3 = C^1(\langle a,b\rangle)$ Dvě Neumannovy podmínky

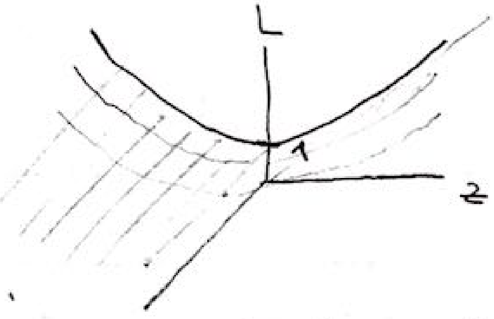
Protože L nezávisí na y, tak z (E-L) je

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y') = \text{const.} \quad \text{tedy} \quad \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C \in (-1,1),$$

což implikuje $\quad y' = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = \alpha \in \mathbb{R} \implies y(x) = \alpha x + \beta$

$\boxed{(i)}$ $y(x) = \frac{B-A}{b-a}x + \frac{Ab-Ba}{b-a}$ $\qquad \boxed{(ii)}$ $y(x) = A$

$\boxed{(iii)}$ $y(x) = \beta \in \mathbb{R}$ libovolné.



L je sice striktně konvexní vzhledem k z, ale vzhledem k proměnným y, z je "jen" konvexní.

Tedy nalezené stacionární body jsou minimizéry, ale jejich jednoznačnost v případech (i') a (ii') neplyne z Věty 2^*, část (3).

V případě (iii) máme ∞ minimizérů.

$\boxed{\text{Def.}}$ $\delta^{(2)}\Phi[y_0](h,h) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi[y_0+th]\Big|_{t=0}$

$\boxed{\text{Věta 3}}$ (1) Nechť y_0 je extremála $\Phi: X \to \mathbb{R}$, nechť $\delta^2\Phi[y_0](h,h)$ ex. $\Rightarrow \delta^2\Phi[y_0](h,h) \begin{matrix} \overset{\text{MAX}}{\le} \\ \underset{\text{MIN}}{\ge} \end{matrix} 0$

(2) Nechť
$$\begin{cases} \bullet\ L, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial y'}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}, \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2} \in C(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2) \\ \bullet\ \delta\Phi[y_0](h) = 0 \quad \forall h \in X \quad [\text{tzn. } y_0 \text{ je stacionární nebo kritický bod}] \\ \bullet\ \exists c>0 \text{ a } \delta_1>0 \quad \delta^2\Phi[y_0](h,h) \ge c\|h\|_X^2 \quad \forall h \in X,\ \|h\|_X \le \delta_1 \end{cases}$$

pak Φ má v y_0 ostré lok. minimum.

Dk (1) SAMI z věty o fci reálné proměnné

(2) Připomeňme definici $g(t) = \Phi[y_0+th]$ h lib.

Pak $\Phi[y_0+h] - \Phi[y_0] = g(1) - g(0) \underset{\text{Taylor}}{=} g'(0) + \frac{g''(\xi)}{2}$ pro jisté $\xi \in (0,1)$

Ale $g'(0)=0$ z 2. předpokladu. Tedy

$$\Phi[y_0+h] - \Phi[y_0] + \frac{g''(0) - g''(\xi)}{2} = \frac{g''(0)}{2}$$

Z třetího předpokladu

$$\frac{c}{2}\|h\|_X^2 \le \frac{g''(0)}{2} \le \Phi[y_0+h] - \Phi[y_0] + \frac{c}{4}\|h\|_X^2$$

pro $\|h\|_X$ dostatečně malé.

$\Rightarrow \Phi[y_0] \le \Phi[y_0+h] \quad \forall h \quad (\|h\|_X \le \delta_1)$.

$\Rightarrow y_0$ je lokální minimizér. ∎

$\boxed{\text{Ještě jedna postačující podmínka}}$ Platí

$$\delta^{(2)}\Phi[y_0](h,h) = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y+th, y'+th')h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y+th, y'+th')h(x)\right]\Bigg|_{t=0} dx$$

$$= \int_a^b \Big[\underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y'}(x,y,y')}_{P(x)}[h'(x)]^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\, 2\underbrace{h(x)h'(x)}_{=[h^2(x)]'} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,y')h^2(x)\Big]dx$$

$$= \int_a^b P(x)(h'(x))^2 + Q(x)h^2(x)\ dx \quad =: \Psi[h]$$

kde $\quad Q(x) = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,y')$

Ψ je kvadratický funkcionál v h, jehož (E-L) má tvar
$[\ L(x,h,h') = P(x)[h']^2 + Q(x)h^2\ ]$

$$\boxed{\begin{array}{c} -\left(P(x)h'(x)\right)' + Q(x)h(x) = 0 \\ h(a) = h(b) = 0 \end{array}}$$

JACOBIHO ROVNICE (J)

Def Bod $x \in (a,b]$ se nazývá konjugovaný bod (J) pokud $\exists$ netriviální řeš. (J) s $h(a)=0$ a $h(x)=0$.

Věta 4 (JACOBI)

(1) Nechť $\frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0$ na $[a,b]$ a y_0 je lokální minimizér Φ $\Big\} \Rightarrow$ neexistují konjugovaný bod v (a,b).

(2) Nechť $y_0 \in C^2(\langle a,b\rangle)$ řeší (E-L)
Nechť $\frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0$ na $[a,b]$
Nechť v $(a,b]$ neexistuje konj. bod (J) $\Big\} \Rightarrow$ y_0 je lok. minimizér Φ.

$\boxed{\text{Dk}}$ Gelfand, Fomin: Calculus of Variations.

$\boxed{\text{HLADKOST ŘEŠENÍ}}$

Definice funkcionálu Φ má (dobrý) smysl pro $y \in C^1(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz věty 2 vyžadoval*, aby

$$(*) \qquad -\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(\cdot, y, y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(\cdot, y, y') \in C(\langle a,b\rangle),$$

abychom mohli použít fundamentální lemma.
Věta 2* přímo předpokládala $y \in C^2(\langle a,b\rangle)$.

OTÁZKA: Lze dokázat platnost věty 2 bez předpokladu (*)?

Ke kladné odpovědi si nejdříve všimneme, že slabá forma (E-L) má tvar

VIZ DŮKAZ VĚTY 2*

$$\int_a^b \left[E(x)\, h'(x) + G(x)\, h(x)\right] dx = 0,$$

kde $E = \frac{\partial L}{\partial y'}(\cdot, y, y')$ a $G = \frac{\partial L}{\partial y}(\cdot, y, y')$

Předpokládejme nyní, že E a G jsou pouze spojité, $E, G \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak nemůžeme „per-partesit" v 1. členu. Zadefinujeme-li však

$$P_G(x) = \int_0^x G(s)\, ds, \quad \text{pak} \quad P_G' = G \quad \text{a} \quad P_G \in C^1(\langle a,b\rangle)$$

a lze „per-partesit" v 2. členu. Dostaneme

$$0 = \int_a^b \left[E(x) - P_G(x)\right] h'(x) + \underbrace{\left[P_G(x)\, h(x)\right]_a^b}_{=0} \quad \forall\, h \in \left[C^1(\langle a,b\rangle)\right]_0$$

Z varianty fund. lemmatu variačního počtu (viz dále) plyne, že

$$E(x) - P_G(x) = \text{konst.} \Leftrightarrow E = \text{konst} + P_G(x) \in C^1(\langle a,b\rangle)$$

Tedy $E \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a výraz v (*) tvaru $-E' + G$ je skutečně spojitý. Pomocný předpoklad (*)

v důkazu Věty 2 je tedy ověřen (tj. platí) a není jej třeba předpokládat.

Věta 2 tedy platí za předpokladu $y \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a $L \in C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$.

Lemma (varianta fund. lemmatu variačního počtu)

Nechť $G \in C(\langle a,b\rangle)$ splňuje $\boxed{\int_a^b G(x)\, h'(x)\,dx = 0 \quad \forall h \in C^1(\langle a,b\rangle),\ h(a)=h(b)=0}$

Pak $G \equiv$ konst.

Dk: Označme $c^* := \frac{1}{b-a}\int_a^b G(x)\,dx = ⨍_a^b G(x)$ průměr G přes (a,b).

Definujme $h(x) = \int_a^x [G(s) - c^*]\,dx$.

Ověřte, že $h \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a $h(a) = h(b) = 0$

Tedy h je přípustná "testovací" funkce v .

Po dosazení

$$0 = \int_a^b G(x)\big(G(x) - c_*\big) = \int_a^b \big(G(x) - c_*\big)\big(G(x) - c_*\big)\,dx$$

neboť $\int_a^b (G(x) - c_*)\,dx = 0$

což implikuje $G(x) \equiv c_*$ ∎

Aplikace variačního počtu v klasické mechanice

V klasické mechanice se pracuje s pojmem hmotného bodu, který je charakterizován hmotností m a jehož pohyb je dán trajektorií

$$\vec{x} : \underbrace{[0,T]}_{\text{čas}} \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{x} = \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

přičemž $\vec{x}(0)$ udává známou počáteční polohu hmotného bodu $\vec{x}_0$

Q: Je možné ze znalosti dat $\boxed{m, \vec{x}_0 \text{ a } T}$ určit z nějakých principů trajektorii $\boxed{\vec{x} = \vec{x}(t)}$?

A: Ano, najdi řešení pohybových rovnic

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) := \boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{x}}{dt}\right) &= \vec{F} \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0 \\ \frac{d\vec{x}}{dt}(0) &= \vec{x}_1 \end{aligned}}$$

kde $\vec{F}$ popisuje souhrn všech sil na částici působící

kde $\vec{x}_1$ je počáteční rychlost trajektorie, kterou bych měl přidat mezi data úlohy: $\boxed{m, \vec{x}_0, \vec{x}_1, T}$

- Je-li síla $\vec{F}$ ve tvaru gradientu potenciální energie U, tzn.

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{x}) \quad \Leftrightarrow \quad F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}),$$

pak ty pohybové rovnice

$$(*) \qquad -\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx_i}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \qquad i = 1,2,3$$

jsou podobné E-L rovnicím

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i'}(t,\vec{y},\vec{y}')\right) + \frac{\partial L}{\partial y_i}(t,\vec{y},\vec{y}') = 0$$

Q: Je přirozené se ptát, zda vskutku lze ztotožnit rovnice $(*)$ s kritickými body nějakého funkcionálu.

Pozor! • Oproti předchozímu výkladu pracujeme s $\underline{\text{vektorovými}}$ funkcemi a $\underline{\text{systémy}}$ ODR

• Je přehlednější psát $\boxed{\dot{x}_i \text{ místo } \frac{dx_i}{dt}}$

tzn. rovnice (*) má pak tvar

$$-(m\dot{x}_i)^{\bullet} + \frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \qquad \text{mat.}$$

nebo

$$\underbrace{(m\dot{x}_i)^{\bullet} - \frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0}_{} \qquad \text{fyz.}$$

což chceme ztotožnit s E-L. rovnicí

$$\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)^{\bullet} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0}_{} \qquad L = L(t,\vec{x},\dot{\vec{x}})$$

• A - nebylo tak jednoduché, tak v klasické mechanice se nepracuje jen s jediným hmotným bodem, ale s N hmotnými body. Máme tedy 3N veličin

x_1, x_2, x_3 bod 1

x_4, x_5, x_6 bod 2

$\vdots$

$x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}$ bod 3

Nadále $\boxed{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})}$

Věta 9.7 Pohyb systému N hmotných bodů hmotnosti $\hat{m}_i$ v potenciálním poli $U = U(\vec{x})$ daný rovnicí

$$(*) \qquad (m_i\dot{x}_i)^{\bullet} - \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, 3N$$

se shodují s kritickými body funkcionálu

$$E(\vec{x}) := \int_0^T L(\vec{x},\dot{\vec{x}})\,dt \quad \text{kde } L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2}^{=:T} - U(\vec{x})$$

kde užíváme značení $m_{3(i-1)+j} := \hat{m}_i \quad i = 1, \dots, N;\ j = 1, 2, 3.$

$$m_1 = m_2 = m_3 = \hat{m}_1$$
$$m_4 = m_5 = m_6 = \hat{m}_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$m_{3N-2} = m_{3N-1} = m_{3N} = \hat{m}_N$$

platí:

(Dk) $$\delta E(\vec{x})(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{3N} \int_0^T \left(m_i \dot{x}_i \dot{h}_i - \frac{\partial U}{\partial x_i} h_i\right) dt$$

$$\forall \vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{3N}) \in C^1([0,T])^{3N},\ h_i(0) = h_i(T) = 0.$$

Tedy s použitím základního lemmatu variačního počtu, či jeho varianty a podmínky

$$\delta E(\vec{x})(\vec{h}) = 0 \quad \forall \vec{h}$$

dostáváme, postupnou volbou $\vec{h} = \underbrace{(0, \dots, h_i, \dots 0)}_{3N}$, pohybové rovnice (*). ▨

Q: K čemu je tato ekvivalence dobrá?

Funkcionál $E(\vec{x})$ mohu zapsat ekvivalentně pomocí jiných souřadnic (připomeňme si funkcionál délky křivky

$$L(\gamma) := \int_a^b \left[(\gamma_1'(s))^2 + (\gamma_2'(s))^2\right]^{1/2} ds = \int_\alpha^\beta \left[(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)\right]^{1/2} d\varphi).$$

Tzn. $$E(\vec{x}) = E(\vec{q}) = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\, dt$$

Pak pohyb mohu napsat pomocí (E-L) rovnic v (zobecněných) souřadnicích $\vec{q}$:

$$\text{(L)} \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \dots, 3N$$

$$L := T - U$$

q_i .... zobecněná souřadnice $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ .... zobecněná hybnost

$\dot{q}_i$ ... —"— rychlost $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ ... zobecněná síla

Příkladem může být ROVINNÝ POHYB HMOTNÉHO BODU V CENTRÁLNÍM POLI POPSANÝ V POLÁRNÍCH SOUŘADNICÍCH:

$(x_1, x_2) \dashrightarrow (q_1, q_2) \qquad q_1 = r,\ q_2 = \varphi$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{x}_2 &= \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} m\left[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2\right] \qquad U = U(r)$$

$$L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) = T - U$$

Lagrangeovy rovnice pak mají tvar

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial r} = \underbrace{(m\dot r)^{\cdot} - m(\dot\varphi)^2 r + \frac{\partial U}{\partial r}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = (m r^2\dot\varphi)^{\cdot} = 0 \implies r^2 m\dot\varphi = \text{konst.}$$

[moment hybnosti se během pohybu nemění]

[Místo popisu pomocí rovnic v souřadnicích (x_1,x_2) mám rovnice pro souřadnice (r,φ).]

Také víme, že pokud L nezávisí explicitně na t, vždy existuje první integrál a platí

$$L(\vec q,\dot{\vec q}) - \underbrace{\dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{\text{Einsteinova } \Sigma \text{ konv.}} = \text{konst.} \iff L(\vec q,\dot{\vec q}) - \dot{\vec q}\cdot\vec p = \text{konst.}$$

$$\vec p := \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec q}} \quad \text{zobecněná hybnost.}$$

Významným obratem/krokem je přechod od Lagrangeových rovnic (L) k rovnicím Hamiltonovým (H). K tomu použijeme důležitý nástroj, který se nazývá <u>Legendreova transformace</u>.

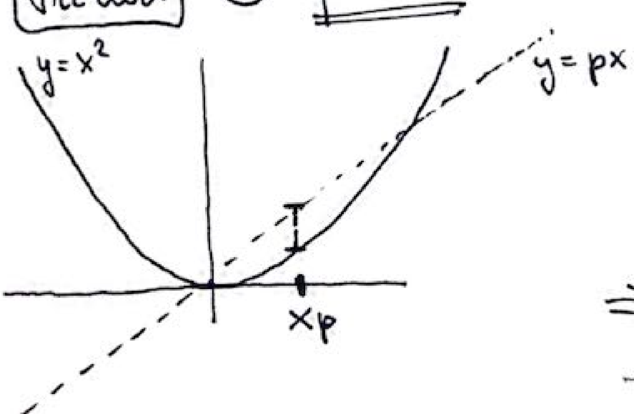
[Legendreova transformace] Buď $f \in C^2$, striktně konvexní. Pak

$$\text{Leg}: f(x) \longmapsto g(p), \quad \text{kde } g(p) := p\,x(p) - f(x(p))$$

a $x(p)$ je bod maxima funkce $px - f(x)$ pro dané p.

někdy se g nazývá DUÁLNÍ FUNKCE

[Příklad] ① $f(x) = x^2$



[Hledáme $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} (px - f(x))$]

Nutná podmínka

$$p - f'(x) = 0$$
$$p - 2x = 0$$
$$x_p = \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow g(p) = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4}$$

Tedy $\text{Leg}(x^2) = \frac{p^2}{4}$ neboli $\text{Leg}: x^2 \longmapsto \frac{p^2}{4}$

② Ukažte si sami, že $\cdot\ \text{Leg}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{p^2}{2}$

$\cdot\ \text{Leg}\left(\frac{mx^2}{2}\right) = \frac{p^2}{2m}$

③ $\boxed{f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha},\ \alpha > 1}$ $\Rightarrow$ Nutná podmínka: $p - x^{\alpha-1} = 0 \Downarrow$

$x = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$

a tedy $(\text{Leg} f)(p) = g(p) = p^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} =$

$= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{p^\beta}{\beta}$ kde $\boxed{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1}$

β <u>duální</u> exponent k α, $\beta := \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Legendreova transformace striktně konvexní funkce je striktně konvexní fce.

Má tedy smysl: $\boxed{\text{Leg}(\text{Leg} f)}$ $\forall f$ <u>striktně konvexní</u>

$\boxed{\text{Platí:} \quad \text{Leg}(\text{Leg} f) = f}$

<u>Legendreovu transformaci</u> lze definovat i pro $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ C^2 splňující $d^2 f(x; h, h) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\forall h \in \mathbb{R}^d$.

$\text{Leg}: f(x) \longmapsto g(p)$ kde $g(p) := p \cdot x(p) - f(x(p))$

$x(p) = \max_x (x \cdot p - f(x))$

tn. rce pro $x(p)$ má tvar $\boxed{p = \nabla f(x(p))}$

Buď $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ striktně konvexní vzhledem k $\dot{\vec{q}}$

$$L \in C^2(\underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{\vec{q}}{\mathbb{R}^{3N}} \times \underset{\dot{\vec{q}}}{\mathbb{R}^{3N}})$$

tzn. $\frac{\partial^2 L(t,\vec{q},\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} h_i h_j \geq \alpha |h|^2_{\mathbb{R}^{3N}} \quad \forall h \in \mathbb{R}^{3N}$

$$(L) \iff \boxed{\dot{\vec{p}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \;\wedge\; \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}}$$

Věta 9.8. Za daných předpokladů platí: $\boxed{(L) \iff (H)}$, kde

$$\boxed{(H) \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}, \quad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial p}}$$

a

$$\boxed{H(t,q,p) = \mathrm{Leg}(L_{t,q}(\dot{q}))(p) = \vec{p}\cdot\dot{\vec{q}} - L(t,\vec{q},\dot{\vec{q}})}$$

Dk) Dle definice Legendreovy transformace a dle definice H plyne pro $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ (podmínka na extrém)

a pro ∇H platí jednak

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_{3N}}, \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_{3N}}\right)$$

ale také (z pravé strany definice H)

$$\nabla H = \left(-\frac{\partial L}{\partial t}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}, -\frac{\partial L}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial L}{\partial q_{3N}}\right)$$

Platí-li (L), viz vzorečky před Větou, tak dostáváme

$$\underset{\sim}{\dot{p}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = \underset{\sim}{-\frac{\partial H}{\partial q}} \quad \text{a} \quad \underset{\sim}{\dot{q}} = \underset{\sim}{\frac{\partial H}{\partial p}}$$

a podtržené vztahy jsou Hamiltonovy rovnice.

Naopak, platí-li (H), dostaneme stejnými argumenty (L). ∎

Důležitá poznámka: V předchozí větě (a jejím důkazu) tvar $L = T - U$ nehrál žádnou roli. Věta 9.8 je tak obecnou větou variačního počtu.

Věta má významné důsledky.

Důsledek 1 Platí $\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}}$ neboli pokud H nezávisí explicitně na t, pak $\frac{dH}{dt} = 0$, což implikuje že $H \equiv$ konst. (nemění se s časem).

Dk $$\frac{dH}{dt} = \left(\sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t} \underset{(H)}{=} \sum_i \underbrace{\left\{-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right\}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Definice Jsou-li f, g dvě funkce závislé na t, $\vec{p}, \vec{q}$, pak je definována předpisem Poissonova závorka $\{f,g\}$ funkcí f a g

$$\{f,g\} := \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

$\vec{p} = (p_1, \dots, p_k)$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_k)$

Motivace Je-li $f(t,p,q)$ a H je Hamiltonián splňující (H), pak

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \overset{(H)}{=} \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad \blacksquare$$

DŮSLEDEK 2

Je-li $L = T - U$, kde $T := \sum_{i,j=1}^{3N} a_{ij}(t,\vec{q})\dot{q}_i\dot{q}_j$ a $U = U(t, q_1, \dots, q_{3N})$ a $a_{ij} = a_{ji}$

pak lze ukázat, že $\boxed{H = T + U}$

Dk $$H = \vec{p}\cdot\dot{\vec{q}} - L(t,\vec{q},\dot{\vec{q}}) \underset{(H)\Leftrightarrow(L)}{=} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$
$$= \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \underset{\text{struktura } T}{=} 2T - T + U = T + U.$$

Je-li totiž $f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i x_j \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_s} = \sum\left(a_{ij}x_i\delta_{js} + a_{ij}\delta_{is}x_j\right)$
$$= \sum\left(a_{is}x_i + a_{sj}x_j\right)$$
$$= 2\sum_{i=1}^{k} a_{is}x_i$$

a

2 Posloupnosti a řady funkcí

2.1 Bodová a stejnoměrná konvergence

Uvažujme posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcí z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.
Označme $M := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \lim_{n\to\infty} f_n(z) \text{ existuje}\}$

a

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \text{pro } z \in M$$

Definice Řekneme, že f_n konvergují k f bodově v M, a píšeme $\boxed{f_n \to f \text{ v } M}$, právě když

$$(\forall z \in M)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon, z))(\forall n \geq n_0)\ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

OTÁZKY

(1) Je-li $f_n \in C(M)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ a $f_n \to f$ v M, je pak $f \in C(M)$?

Podobně se lze ptát zda se při limitním přechodu (bodové konvergenci) zachovávají další vlastnosti:

- spojitost derivací
- integrovatelnost

Otázka spojitosti znamená, že pro libovolné $z_0 \in M$, (o kterém víme, že $f_n(z_0) \to f(z_0)$, a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{z\to z_0} f_n(z) = f(z_0)$)

chceme ukázat, že

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Toto lze zapsat také jako otázku:

Platí:

$$(*) \qquad \lim_{z\to z_0} \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z) \ ?$$

Tedy jako otázka o zaměnitelnosti limit:

- Stačí bodová konvergence k tomu, aby bylo možné zaměnit limity a platil vztah $(*)$?

(2) Podobně se můžeme ptát, zda bodová konvergence stačí k platnosti

$$(**)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim f_n(x)\,dx \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

tj., zda lze zaměnit integrál a limitu.

(3) Platí následující vztahy?

věta o derivování součtu

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)' = \left(\lim_{m\to\infty} s_m(z)\right)' \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} s_n'(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(z) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$$

n-tý částečný součet $\sum_{k=1}^{n} f_n(z)$

Neboli, lze prohodit limitu a derivování či spočítat derivaci součtu funkcí jako součet derivací jednotlivých členů?

(4) Vznikne součtem $\left(\sum_{1}^{\infty} f_n\right)$ spojitých funkcí vždy spojitá funkce?

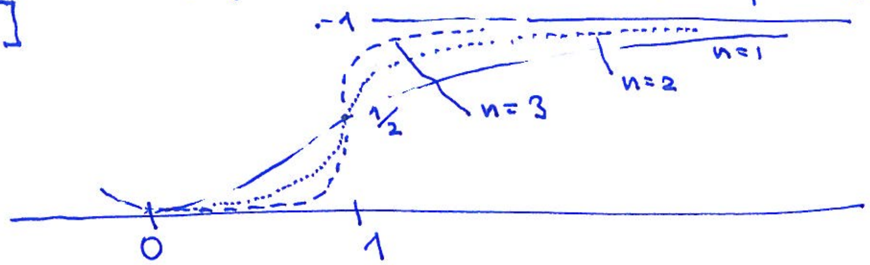
NÁSLEDUJÍCÍ PŘÍKLADY ukazují, že <u>bodová</u> konvergence <u>NESTAČÍ</u> a některé nezaručují/nedávají kladnou odpověď na výše uvedené otázky.

$\boxed{\text{Příklad 1}}$ Buď $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované vztahem $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

Zřejmě $f_n \in C(\mathbb{R})$, f_n sudá a platí (zkoumáním čitatelů limit $f_n(x)$ pro $|x|>1$, $|x|=1$ a $|x|<1$)

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |x|>1 \\ \tfrac{1}{2} & \text{pro } |x|=1 \\ 0 & \text{pro } |x|<1. \end{cases} \qquad \text{viz obr. 1}$$

Tedy $f \notin C(\mathbb{R})$ a vidíme, že bodová konvergence $\{f_n\}$ nezachovává obecně spojitost. [Všimněme si, že $f \in C((-1,1))$ a $f \in C((1,\infty))$.]



obr. 1

Příklad 2 Buď $f_n(x) = n^2 x (1-x)^n$ uvažované na $\langle 0,1\rangle$.

Ukážeme, že (i) $f_n(x) \to 0$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \;(=0)$

Tedy, tento příklad ukazuje, že bodová konvergence nestačí na záměnu integrálu a limity.

Řešení: Pozorujeme, že $f_n(0) = f_n(1) = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pro $x \in (0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} x\, n^2 (1-x)^n = x \lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{(1-x)^{-y}} = x \lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{\exp(\underbrace{-\ln(1-x)}_{}\, y)} = 0$$

pro pevné $x \in (0,1)$ je toto kladná konst.

Tedy pro $x \in \langle 0,1\rangle$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

$$\boxed{f_n \to 0 \quad \text{na } \langle 0,1\rangle}$$

Dále

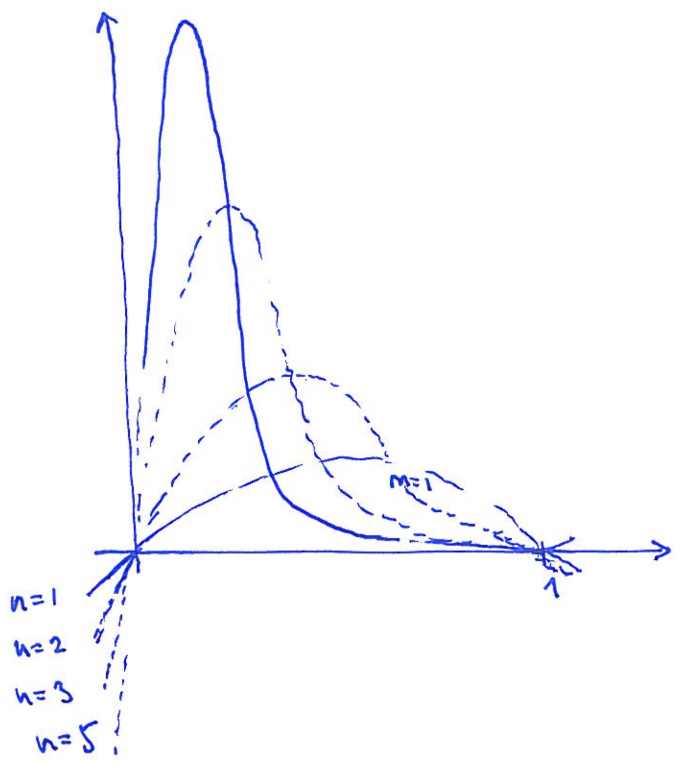
$$\int_0^1 f_n(x) = n^2 \int_0^1 x (1-x)^n\,dx = -\frac{n^2}{n+1}\underbrace{\Big[x(1-x)^{n+1}\Big]_0^1}_{=0} + \frac{n^2}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,dx$$

$u = x \to u' = 1$, $v' = (1-x)^n \to v = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$

$$= -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\Big[(1-x)^{n+2}\Big]_0^1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 1 \quad \text{pro } n\to\infty.$$

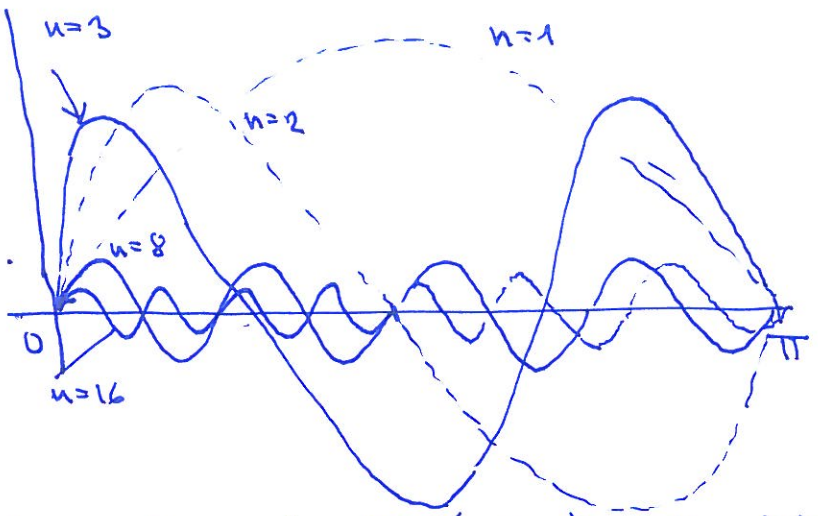
Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx$$



Obr. 2

Příklad 3 Posloupnost funkcí $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $(x \in \mathbb{R})$ konverguje bodově k 0: $f_n(x) \to 0$ pro $n \to \infty$ a $x \in \mathbb{R}$ libovolné, ale $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$ nemá bodovou limitu v žádném bodě.



obr. 3

Připomeň: $f_n \to f$ v M (bodově) $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists N_0 = N_0(x,\varepsilon))(\forall n > N_0)$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Existuje-li však N_0 vždy stejné pro všechna $x \in M$ mluvíme o konvergenci stejnoměrné.

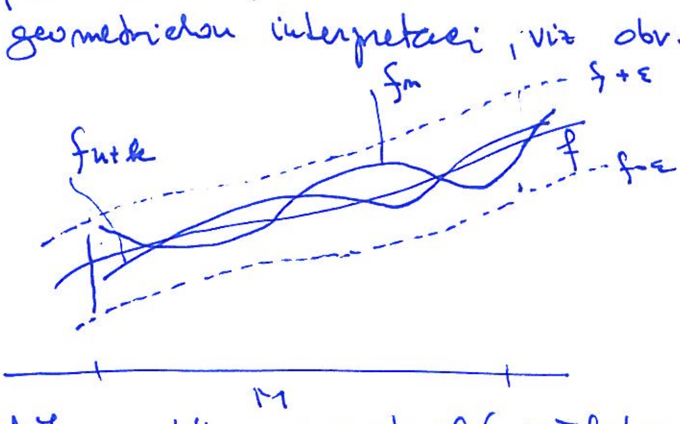
Definice Řekneme, že f_n konverguje k f stejnoměrně v M, píšeme $f_n \rightrightarrows f$ v M pro $n \to \infty$, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 = N_0(\varepsilon))(\forall x \in M)(\forall n \geq n_0)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Jsou-li $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pak má stejnoměrná konvergence zapsaná ve tvaru

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \quad \text{pro } \forall x \in M \text{ a } \forall n \geq N_0$$

názornou geometrickou interpretaci, viz obr. 4.



obr. 4

Cvičení Vyjděte z této geometrické představy a rozhodněte, na jakých množinách $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Příkladů 1, 2, 3 konvergují stejnoměrně.

Definice Řekneme, že f_n konvergují k f lokálně stejnoměrně v M, píšeme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ v M, právě když $\forall K \subset M$ kompaktní (tj. uzavřený & omezený) $f_n \rightrightarrows f$ v K.

$\boxed{\text{Věta 1}}$ KRITÉRIUM STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE

Buď $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Platí

$$f_n \rightrightarrows f \text{ v } M \text{ pro } n\to\infty \iff \sigma_M := \sup_{z\in M} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Dk $f_n \rightrightarrows f$ v M pro $n \to \infty$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N_0)(\forall n \geq N_0)(\forall z\in M) \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow \quad (\forall \varepsilon>0)(\exists N_0)(\forall n \geq N_0) \quad \underbrace{\sup_{z\in M} |f_n(z) - f(z)|}_{\sigma_n} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow \quad \sigma_n \to 0 \text{ pro } n\to\infty.$$

Příklad Vraťme se k Příkladu 2 a zkoumejme, zda v $\langle 0,1\rangle$ f_n konvergují k f stejnoměrně. Protože $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ jsou z $C^\infty(\langle 0,1\rangle)$ a $f_n(0) = f_n(1) = 0$, tak f_n nabývá v $(0,1)$ maximum (a tedy také $|f_n - f| = f_n - 0 = f_n$) v bodě, kde $f_n'(x) = 0$.

$$f_n'(x) = 0 \iff f_n'(x) = n^2(1-x)^{n-1}\left[1-x-nx\right] = 0 \iff x_{max}^n = \frac{1}{n+1}$$

A tedy $$\sigma_n = f_n(x_n) = \frac{n^2}{1+n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = n \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\to \frac{1}{e}} \to +\infty.$$

Tedy, f_n nekonvergují k f stejnoměrně na $\langle 0,1\rangle$.

Pokud však uvažujeme interval $\langle \delta, 1\rangle$ pro $\delta>0$, tak od jistého n_0 bude $x_{max}^n < \delta$ pro $\forall n \geq n_0$. Pak pro tato $n \geq n_0$ je $\sigma_n := \sup_{x\in\langle\delta,1\rangle} f_n(x) = f_n(\delta) \to 0$ as $n\to\infty$.

Shrňme si získané výsledky: (i) $f_n \not\rightrightarrows f$ na $\langle 0,1\rangle$

(ii) $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle \delta, 1\rangle$ pro $\forall \delta>0$ a tedy

(iii) $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(0,1\rangle$ $(n\to\infty)$

$\boxed{\text{Věta 2}}$ (Bolzano-Cauchyho podmínka stejnoměrné konvergence)

$$f_n \rightrightarrows f \text{ v } M \ (n\to\infty) \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n,m\geq n_0)(\forall z\in M)\ |f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$$

Kontrolní otázka: Proč je Bolzano-Cauchy podmínka důležitá pro charakterizaci stejnoměrné konvergence?

(Dk) $\boxed{\Rightarrow}$ plyne z Δ-nerovnosti: $|f_n(z)-f_m(z)| = |f_n(z)-f(z)+f(z)-f_m(z)|$
$$\leq |f_n(z)-f(z)| + |f_m(z)-f(z)|$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Volme $z\in M$ libovolné, ale pevné. Pak z předpokladu plyne, že $\{f_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ splňuje B-C podmínku pro posloupnosti. Existuje tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, označme ji $f(z)$. Máme nyní kandidáta na limitní funkci – zbývá ověřit, že vskutku $f_n \rightrightarrows f$ v M.

Buď $n>n_0$ pevné a $m=n_0+1, n_0+2, \dots, n_0+k, \dots$
Pak z předpokladu plyne, že $\forall z\in M$ a $\forall m>n_0$
$$|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$$
Tedy
$$\lim_{m\to\infty}|f_n(z)-f_m(z)|\leq\varepsilon$$
Ale
$$\lim_{m\to\infty}|f_n(z)-f_m(z)| = |f_n(z)-f(z)|$$
∎

$\boxed{\text{Věta 3}}$ (O záměně limit a zachování spojitosti)

Buď $f, f_n: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ takové, že

(P1) $f_n \rightrightarrows f$ v M

a

(P2) pro nějaké $x_0\in M$ takové, že $U(x_0)\subset M$ existují $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) =: c_n$

Pak

(T1) existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n =: c$

(T2) $c = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ neboli $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Speciálně: Jsou-li $f_n\in C(M)$ a $f_n\rightrightarrows f$ v M, pak $f\in C(M)$
(stejnoměrná konvergence zachovává spojitost)

Stejnoměrná konvergence je postačující podmínka k zachování spojitosti.
Příklad 2 však ukazuje, že zdaleka není podmínkou nutnou:
$\{f_n\}$ v Př. 2 nekonvergují k $f\equiv 0$ stejnoměrně na $\langle 0,1\rangle$, přesto je f spojitá.
∎

Dk [T1] z (P1) plyne $(\exists n_0)(\forall n, m \geq n_0)(\forall x \in M)$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

~~[illegible]~~
Z existence limit, tj. (P2), pak plyne, že

$$|c_n - c_m| \leq \varepsilon.$$

Tedy $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a má v $\mathbb{R}$ limitu. (T1) je dokázáno.

[T2]
$$|c - f(x)| = |c - c_n + c_n - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$$
$$\leq |c - c_n| + |c_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$

Zde n je dostatečně velké, ale pevné a takové, že 1. člen je $\leq \varepsilon$ a první části důkazu, 3. člen je $< \varepsilon$ díky (P1) a $|c_n - f_n(x)| < \varepsilon$ pro $x \in P(x_0)$ díky (P2). Ukázali jsme tedy, že pro dané 3ε $\exists P(x_0)$ tak, že pro $\forall x \in P(x_0)$: $|c - f(x)| < 3\varepsilon$. ☒

Cvičení Dokažte SPECIÁLNĚ (které plyne z právě dokázaného) přímo.

Dk cvičení Buď $x_0 \in M$ libovolné, pevné. Chceme ukázat, že

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Víme, že $(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall x \in M)\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (plyne z (P1)).

Protože f_{n_0} je spojitá v x_0, $\exists U(x_0)\ \forall x \in U(x_0)\ |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Pro $x \in U(x_0)$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{z (P1)}}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{\text{z } f_{n_0} \in C(U(x_0))} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{z (P1)}}}$$

a

☒

$\boxed{\text{Věta 4}}$ (O záměně limity a integrálu)

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle$ $(n\to\infty)$ a $\{f_n\} \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ $(\forall n)$

Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle) = \{u: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R};\ (R)\int_a^b f(x)\,dx < +\infty\}$

Navíc

(1) Definujeme-li $F_k(x) := \int_a^x f_k(t)\,dt$ a $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$,

pak $F_k \rightrightarrows F$ v $\langle a,b\rangle$ $(k\to\infty)$

(2) Speciálně

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim f_n(t)\,dt$$

Dk) Skutečnost, že $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ je intuitivně zřejmé (Riemannův integrál je budován k výpočtu obsahu) a geometrické interpretace stejnoměrné konvergence.

Dále:

$$\sup_{x\in\langle a,b\rangle} |F_k(x) - F(x)| = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} \left| \int_a^x f_k(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right|$$

$$\leq \sup_{x\in\langle a,b\rangle} \int_a^x |f_k(t) - f(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^b |f_k(t) - f(t)|\,dt$$

$$\leq \sup_{t\in\langle a,b\rangle} |f_k(t) - f(t)|\,(b-a)$$

$\to 0$ dle Věty 1. ■

<u>Pozorování</u> Opět je i v této situaci stejnoměrná konvergence „jen" postačující podmínka, jak ukazuje následující (proti)příklad: $f_n(x) = x^n$ na $\langle 0,1\rangle$.

Pak $f_n(x) \to \begin{cases} 0 & x\in\langle 0,1) \\ 1 & x=1 \end{cases}$

Tedy $f_n \not\rightrightarrows f$ v $\langle 0,1\rangle$; ale

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim x^n\,dx.$$ ■.

$\boxed{\text{Věta 5}}$ (O záměně limity a derivace)

Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou definovány na $I \subset \mathbb{R}$ interval.
Nechť

(P1) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)$ $f_n'(x)$ existuje

(P2) $f_n' \rightrightarrows G$ na I

(P3) $(\exists x_0 \in I)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ existuje

Pak

(T1) Pro $(\forall x \in I)$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$

(T2) Pro $\forall I' \subset I$ omezený: $f_n \rightrightarrows f$ v I'

(T3) $\lim f_n'(x) = (\lim f_n(x))' = f'(x)$, což implikuje $\boxed{G = f'}$ a existenci $f'(x)$ $\forall x \in I$.

Pozorování ① Příklad ③ $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ ukazuje, že stejnoměrná konvergence $f_n \rightrightarrows f$ zdaleka na záměnu derivace a limity nestačí!!

② Posloupnost $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + n$ naopak ukazuje, že potřebuji konvergenci alespoň v jednom bodě. Vskutku, $f_n'(x) = x^n \rightrightarrows 0$ na $(-1/2, 1/2)$, ale limita vlastní pro $f_n(x)$ s $n \to \infty$ neexistuje pro $x \in (-1/2, 1/2)$. Tedy o f nelze vůbec mluvit.

Dk $\boxed{\text{Ad (T1) a (T2)}}$ Ověříme platnost B-C podmínky (viz Věta 2)

Protože dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (LVOSH)

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) + f_n(x_0) - f_m(x_0)$$
$$= (f_n'(\xi) - f_m'(\xi))(x - x_0) + f_n(x_0) - f_m(x_0)$$

pro jisté ξ mezi x_0 a x, dostáváme

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|\,|x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| =: I_1 + I_2$$

Protože $I' \cup \{x_0\} \subset \langle -K, K \rangle$ pro jisté $K > 0$, a díky (P2) $\exists n_0$ $\forall n, m \ge n_0$ je $|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{4K}$ pro $\forall \xi \in I$, a díky (P3) je $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, dostáváme:

K danému $\varepsilon > 0$ jsme našli $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n, m \geq n_0$ a pro všechna $x \in I'$: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.
Dle Věty 2, tvrzení (T1) a (T2) platí.

$\boxed{\text{Ad (T3)}}$ Chceme ukázat, že pro $x \in I'$

(*) $$\lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h},$$

přičemž víme, že levá strana $= \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = G(x)$.

Záměna limit v (*) platí, pokud dle Věty 3,

$$g_n(h) := \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}$$ dodefinované pro $h = 0$ spojitě, tj. $g_n(0) = f_n'(x)$, konvergují stejnoměrně na $[0, h_0]$.

Avšak

$$g_n(h) - g_m(h) = \frac{(f_n - f_m)(x+h) - (f_n - f_m)(x)}{h}$$

Lagrangeova věta o středních hodnotě $\longrightarrow$ $= (f_n' - f_m')(\xi)$, kde ξ leží mezi x a $x+h$.

Tedy $$|g_n(h) - g_m(h)| \leq |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|$$

a (P2) implikují, že

$$g_n \rightrightarrows \begin{cases} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ f'(x) \end{cases} \quad \text{na } [0, h_0]$$

Tedy (*) platí, a protože pravá strana $= f'(x)$, tvrzení (T3) je dokázáno.

$\square$

Pozorování (i) Uvažujme lineární (vektorový) prostor $C(\langle a,b\rangle)$ s normou $\|g\|_\infty = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |g(x)|$.

Ukážeme, že $X := (C(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný a konvergence $f_n \xrightarrow{k} f$ v tomto prostoru je konvergence stejnoměrná. Vskutku, máme-li $\{f_n\} \subset X$ cauchyovskou, pak

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,m \geq n_0\ \forall x\in\langle a,b\rangle\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

což dle Věty 2 implikuje, že

$f_n \rightrightarrows f$ v $\langle a,b\rangle$.

Protože $f_n \in C(\langle a,b\rangle)$, věta 3 implikuje existenci $f\in C(\langle a,b\rangle)$ tak, že $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ (pro $n\to\infty$). ∎

(ii) Naopak, je snadné najít $\{f_n\}\subset C(\langle a,b\rangle)$ tak, že

$\int_a^b |f_n - f_m|\,dx < \varepsilon$ pro $n,m\geq n_0$ od jistého n_0.

ale $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \notin C(\langle a,b\rangle)$. Tedy

$$\left(C(\langle a,b\rangle);\ \|f\|_1 := \int_a^b |f|\,dx\right)$$ je lineární, ale <u>není</u> úplný.

(iii) Příklad ③ výše ukazuje, že

$$\left(C^1(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_\infty\right)$$ není úplný

(iv) Avšak, $\left(C^1(\langle a,b\rangle);\ \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)$ je úplný.

Pozorování Řekneme, že $\{f_n\}$ je v M stejně omezená $\equiv^{df}$ $(\exists K>0)(\forall x\in M)\ |f_n(x)| \leq M$.

Platí (dokažte si sami) $f_n \rightrightarrows f$ v M, pak $\{f_n\}$ stejně omezená.

Z tohoto tvrzení ihned plyne, že posloupnost v Příkladu ② nekonverguje stejnoměrně na $\langle 0,1\rangle$.

$\boxed{2.2}$ Řady funkcí

Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Řekneme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ konvergují } (k\ s) \text{ v } M \begin{cases} \text{BODOVĚ} \\ \text{STEJNOMĚRNĚ} \end{cases} \stackrel{df}{\equiv} \begin{matrix} s_n \to s \text{ v } M \\ s_n \rightrightarrows s \text{ v } M. \end{matrix}$$

[Píšeme: $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n = s \quad \text{STEJNOMĚRNĚ v } M. \end{cases}$]

$\boxed{\text{Věta } 2^*}$ (B.-C. podmínka stejn. konvergence řad)

$\sum f_n$ konvergují v M stejnoměrně $\equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall z \in M$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{Věta } 3^*}$ (O záměně $\sum$ a lim, o zachování spoj.)

Buď $f_n \in C(M)$ a $\sum f_n$ konvergují v M stejnoměrně,

pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C(M)$

(Dk) $f_n \in C(M) \Rightarrow s_n \in C(M)$ a dle Věty 3 $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C(M)$ ∎

$\boxed{\text{Věta } 4^*}$ (O záměně $\int$ a $\sum$) Buď $f_n \in R(\langle a,b \rangle)$ a

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergují stejnoměrně na $\langle a,b \rangle$.

Pak $s \in R(\langle a,b \rangle)$ a $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

$\boxed{\text{Věta } 5^*}$ (O záměně $\sum$ a derivace) Nechť $f_n: (a,b) \to \mathbb{R}$

splňují
- (P1) $f_n'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a,b)$
- (P2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konvergují v (a,b) stejnoměrně (k G)
- (P3) $\exists x_0 \in (a,b)$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) < +\infty$.

Pak
- (T1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergují stejnoměrně v (a,b)

a
- (T2) Pro $\forall x \in (a,b)$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = s'(x)$.

Kritéria stejnoměrné konvergence řad funkcí

Věta 6 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řad)
Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergují stejnoměrně v M, pak $f_n \rightrightarrows 0$ v M

Dk plyne z B.-C. podmínky (Věta 2*), kde vezmeme $p=1$.
Pak
$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall z \in M\quad |f_n(z)| < \varepsilon,$
což jest definice $f_n \rightrightarrows 0$ v M. ▨

Věta 7 (Weierstrassův test) Buď $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \in \mathbb{R}^+$,
a $|f_n(x)| \leq g(x)\ \ \forall x \in M$.
Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konvergují stejnoměrně v M, pak

- $\sum f_n$ konvergují v M stejnoměrně
- $|\sum f_n| \leq \sum |f_n| \leq \sum g_n$

<u>Speciálně</u>: Buď a_n posloupnost čísel : $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x \in M$

Pokud $\sum a_n < +\infty$, pak $\sum f_n$ konv. stejn. v M.

Dk Sami pomocí B.-C. podmínky.

Př. 4 $\sum \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ konvergují stejn. v $\mathbb{R}$ neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$
a $|\sin nx| \leq 1$.

Př. 5 Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci $\sum \frac{x}{1+n^2x^2}$.

<u>Řešení</u> Bodová konv.: $\frac{x}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2}\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right)} \leq \frac{1}{n^2}\frac{1}{x}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x} < +\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}_0^{\#}$

$x=0 \quad \sum \frac{x}{1+n^2x^2} = 0.$

$$\boxed{\sum \frac{x}{1+n^2x^2} < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Stejnoměrná konv.

Hledejme nejdříve $\max\limits_{x \in \langle 0,\infty)} f_n(x)$.

$$f_n'(x) = 0 \iff \frac{1+n^2x^2 - 2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \iff x = \frac{1}{n}$$

Avšak
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n} = +\infty .$$

Tedy nevíme, zda $\sum f_n$ konv. stejnoměrně.

Negace B-C podmínky $\equiv \exists \varepsilon_0 \, \forall n \in \mathbb{N} \; \exists n_0, p_0$ a $\exists x_0 \in M$
$$\left| \sum_{n_0+1}^{n_0+p_0} f_n(x_0) \right| > \varepsilon_0$$

Volme $p_0 = n_0$,
$$\sum_{n=n_0+1}^{2n_0} \frac{x}{1+n^2x^2} \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{členů}}}{n_0} \frac{x}{1+4n_0^2x^2} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{n_0\left[(1+4n_0^2x^2) - 8n_0^2x^2\right]}{(1+4n_0^2x^2)^2} = 0$$

$$x = \frac{1}{2n_0}$$

A vidíme, že

$$g\left(\frac{1}{2n_0}\right) = \frac{\cancel{n_0}\dfrac{1}{2\cancel{n_0}}}{1+\cancel{4n_0^2}\dfrac{1}{\cancel{4n_0^2}}} = \frac{1}{4}$$

volíme-li $\varepsilon_0 = \frac{1}{8}$, pak jsme negaci B-C podmínky ověřili a tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ nekonvergují stejnoměrně

$\boxed{\text{Věta 8}}$ (Leibnitzova) Jsou-li $\{f_n\}: M \to \mathbb{R}$ takové, že
$0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x) \ \forall x \in M$. Pak
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x) \text{ konv. stejn. v } M \iff f_n \rightrightarrows 0 \text{ v } M.$$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ viz Věta 6

$\boxed{\Leftarrow}$ Díky monotónii jsou částečné součty S_{2n} neklesající a odhodnuty $f_1(x)$. Tedy bodově konvergují. Rovněž $S_{2n+1} = S_{2n} + f_{2n+1}$ konvergují k limitě bodově. Navíc, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_k(x) \right| \le f_{n+1}(x)$.

$\boxed{\text{Věta 9}}$ (Dirichletův test) Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\{g_n\}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

(P1) $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $F_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, jsou <u>stejně omezené</u> v M

(P2) $\forall x \in M$ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a $g_n \rightrightarrows 0$ v M.

Pak
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x) \text{ konvergují stejn. v } M.$$

Dk Ukažte indukcí, že platí <u>diskrétní verze integrace per-partes</u>
$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} F_k(x)\big(g_k(x) - g_{k+1}(x)\big) + g_n(x) F_n(x)$$

Odsud plyne:
$$s_{n+p}(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} F_k(x)\big(g_k(x) - g_{k+1}(x)\big) + g_{n+p} F_{n+p} - g_n(x) F_n(x)$$

Tak pro libovolné $x \in M$, z (P1) a monotónie $\{g_n(x)\}$ plyne
$$\underbrace{|s_{n+p}(x) - s_n(x)|}_{= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x)\right|} \le K |g_n(x) - g_{n+p}(x)| + K\big[|g_{n+p}(x)| + |g_n(x)|\big]$$

Ze stejnoměrné konvergence $g_n \rightrightarrows 0$ však najdeme n_0 tak, že $\forall n, n+p \ge n_0 \ \forall x \in M$ $|g_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{4K}$.

Pak $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| < \varepsilon$ a dle B.-C. podmínky je tvrzení dokázáno.

Příklad 6 Uvažme $f_n(x) = e^{inx}$. Pak

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geom. řada}}}{=} e^{ix}\,\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}\,\frac{e^{in\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\;\frac{\frac{e^{-in\frac{x}{2}}-e^{in\frac{x}{2}}}{2i}}{\frac{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}{2i}}$$

$$= e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\;\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

a tedy

$$|F_n(x)| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \qquad \forall x \in \langle \delta, 2\pi-\delta\rangle \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Tedy $\{F_n\}$ je stejně omez. v $\langle \delta, 2\pi-\delta\rangle$.

Z Dirichletova testu tak např. plyne, že

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ konverguje stejnoměrně na $\langle \delta, 2\pi-\delta\rangle$ ⊠

Věta 10 (Abelův test) Nechť $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ jako ve větě 9.

Nechť (P1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně v M

(P2) $\forall x \in M$ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a $\{g_n\}$ je stejně omezená

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,g_n(x)$ konverguje stejnoměrně v M.

(Dk) Sami modifikací důkazu věty 9.

Věta 10.8 (Leibnizova) Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}: M \to \mathbb{R}$ a platí $\boxed{0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x) \quad \forall x \in M \ \forall n \in \mathbb{N}}$

Pak jsou ekvivalentní:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x) \text{ konverguje stejnoměrně} \iff f_n \rightrightarrows 0 \text{ v } M.$$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ plyne z Věty 10.6

$\boxed{\Leftarrow}$ Protože $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně v M, tak konverguje (samozřejmě) bodově v M, tzn. $\forall x \in M \quad f_n(x) \to 0$ (a $\{f_n(x)\}$ je nerostoucí). Jsou tedy splněny předpoklady Leibnizovy věty pro číselné řady (viz Věta 6.10) a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)$ konverguje bodově pro každé $x \in M$.

Označme $\boxed{S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x) \qquad x \in M.}$

Stejnoměrná konvergence řady ↑ bude dokázána, pokud ověříme, že

(•) $$\sup_{x \in M} |S(x) - S_N(x)| = \sup_{x \in M} \Big| \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)}_{V(x)} \Big| \longrightarrow 0 \text{ pro } N \to \infty.$$

Avšak, je-li $N+1$ liché pak

$$V(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x) = f_{N+1}(x) - f_{N+2}(x) + f_{N+3}(x) - f_{N+4}(x) + f_{N+5}(x) - f_{N+6}(x) \dots$$

a z monotónie $\{f_n\}$ vidíme, že ($f_{N+1}(x) - f_{N+2}(x) \ge 0 \wedge -f_{N+2}(x) + f_{N+3}(x) \le 0$)

(••) $$\boxed{0 \le V(x) \le f_{N+1}(x).}$$

Je-li $N+1$ sudé, pak

$$V(x) = \underbrace{-f_{N+1}(x) + f_{N+2}(x)}_{\le 0} \underbrace{- f_{N+3}(x) + f_{N+4}(x)}_{\le 0} \underbrace{- f_{N+5}(x) + f_{N+6}(x)}_{\le 0} - \dots$$

a tedy

(•••) $$\boxed{-f_{N+1}(x) \le V(x) \le 0}$$

Porovnáním (••) a (•••) a dosazením do (•) máme:

$$\sup_{x \in M} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x) \Big| = \sup_{x \in M} |f_{N+1}(x)| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0,$$

přičemž poslední limita plyne z Věty 10.1. a ze skutečnosti, že $\{f_n\}$ konvergují k nule stejnoměrně.

Ještě než zformulujeme "stejnoměrnou" variantu Abel-Dirichletových kritérií, zavedeme nový pojem STEJNÉ omezenosti.

Def Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}: M \to \mathbb{C}$. Říkáme, že $\{f_n\}_{n=1}$ je <u>stejně omezená v M</u>

$\stackrel{df}{\equiv} (\exists K>0)(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in M)\ |f_n(x)| \le K$

Příklad • Posloupnost $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ je stejně omezená v $\mathbb{R}$. $\boxed{K=1}$

• Posloupnost $\{n^2x(1-x)^n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>není</u> stejně omezená v $\langle 0,1\rangle$, ani v $(0,1)$.

• Ukažte: $f_n \rightrightarrows f$ v $M \Rightarrow \{f_n\}$ stejně omezená v M.

Věta 10.9 (Dirichletův a Abelův test). Mějme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Nechť

(P1) $\{g_n\}$ splňuje: $\quad g_{n+1}(x) \substack{\le \\ \ge} g_n(x) \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in M$ <u>monotónie</u>

Pokud $\boxed{\text{BUĎ}}$

(DIR) $\begin{cases} \cdot\ \{F_N\}_{N=1}^{\infty}, \text{ kde } F_N(x) := \sum_{k=1}^{N} f_k(x), \text{ je } \underline{\text{stejně omezená v } M} \\ \cdot\ g_n \rightrightarrows 0 \text{ v } M \end{cases}$

$\boxed{\text{NEBO}}$

(ABEL) $\begin{cases} \cdot\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \underline{\text{konverguje stejnoměrně v } M} \\ \cdot\ \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je } \underline{\text{stejně omezená v } M} \end{cases}$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ <u>konverguje stejnoměrně v M</u>. ⌐

Důkaz • Ověříme platnost B-C podmínky pro stejnoměrnou konvergenci řad.

• Využijeme diskrétní verzi integrace per-partes (kterou si odvodíme):

$$\sum_{m=N+1}^{N+p} f_n(x) g_n(x) = f_{N+1}(x) g_{N+1}(x) + \dots + f_{N+p}(x) g_{N+p}(x)$$
$$= g_{N+1}(x)\big(F_{N+1}(x) - F_N(x)\big) + g_{N+2}(x)\big(F_{N+2}(x) - F_{N+1}(x)\big) + \dots + g_{N+p}(x)\big(F_{N+p}(x) - F_{N+p-1}(x)\big)$$
$$= -g_{N+1}(x) F_N(x) + \big(g_{N+1}(x) - g_{N+2}(x)\big)F_{N+1}(x) + \big(g_{N+2}(x) - g_{N+3}(x)\big)F_{N+2}(x)$$
$$+ \big(g_{N+p-1}(x) - g_{N+p}(x)\big)F_{N+p-1}(x) - g_{N+p}(x)F_{N+p}(x)$$

Odtud:

$$(\blacksquare)\quad \left|\sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x) g_m(x)\right| \le |g_{N+1}(x)|\,|F_N(x)| + \max_{\ell=1,\dots,p-1} |F_{N+\ell}(x)| \sum_{\ell=N+1}^{N+p-1} |g_{\ell+1}(x) - g_\ell(x)|$$
$$+ |g_{N+p}(x)|\,|F_{N+p}(x)|$$

Z monotónie $\{g_n\}$, viz (P1), plyne, že

$\sum_{l=N+1}^{N+p-1} |g_{l+1}(x)-g_l(x)|$ je teleskopická a tedy

$$\sum_{l=N+1}^{N+p-1} |g_{l+1}(x)-g_l(x)| = \pm \left[g_{N+p}(x) - g_{N+1}(x) \right]$$

Tedy z odhadu (■) výše plyne:

$$\underbrace{V_{BC}(x) := \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x)\, g_n(x) \right| \le 4 \max_{l\in\{N+1,\dots,N+p\}} |g_l(x)| \max_{l\in\{N+1,\dots,N+p\}} |F_l(x)|}$$

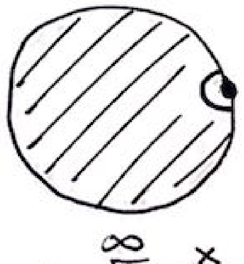
Platí-li (DIR), pak
- $\exists K>0\ \forall l\ \underline{\forall x\in M}\ \ |F_l(x)| \le K$
- $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\ge n_0\ \underline{\forall x\in M}\ \ |g_n(x)| < \varepsilon$

tedy $\sup_{x\in M} V_{BC}(x) \le 4K\varepsilon$. ✓

Platí-li (Abel), pak
- $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall N\ge n_0\ \forall \tilde{p}\in\mathbb{N}\ \underline{\forall x\in M}\ \ |F_{N+\tilde{p}}(x)| < \varepsilon$
- $\exists L>0\ \forall l\ \underline{\forall x\in M}\ \ |g_l(x)| < L$

tedy $\sup_{x\in M} V_{BC}(x) \le 4L\varepsilon$.

__Příklad__ (i) Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje stejnoměrně na $\overline{B_1(0)} \setminus B_\delta(1)$ neboli lokálně stejnoměrně na $\overline{B_1(0)} \setminus \{1\}$.



__Příklad__ (ii) Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$.

__Řešení__ __Bodová konvergence__ $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ je lichá, stačí tedy uvažovat ji na $\langle 0,\infty)$, kde $f_n(x)\ge 0$. Pro $x=0$: $f_n(0)=0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0$.

Pro $x\neq 0$: $0 < \frac{x}{1+n^2x^2} \le \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{x\, n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{c}{x}$.

Řada konverguje bodově v $\mathbb{R}$.

__Stejnoměrná konvergence__ • $f_n(x)$ na $(0,+\infty)$ je $\boxed{f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0}$ rostoucí na $\langle 0, \frac{1}{n}\rangle$ a klesající na $\langle \frac{1}{n}, +\infty)$

a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}$. Ale číselná řada, která majorizuje $f_n(x)$, tj. řada $\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ nekonverguje.

Tedy Weierstrassovo kritérium nám nedalo odpověď, zda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ či nikoliv. Vidíme však, že body, kde fce f_n nabývají maxima, tj. body $\frac{1}{n}$, konvergují k 0.

- Zkusme tedy dle Weierstrassova kritéria prozkoumat stejnoměrnou konvergenci na $\langle \delta, +\infty)$, $\delta > 0$ pevné (byť malé). Pro $\delta > 0$ $\exists\, n_0$ tak, že $\frac{1}{n_0} < \delta$. Pak na $\langle \delta, +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(x)}_{=:\, g(x)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x) \le g(x) + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\delta}{1+n^2\delta^2}}_{\text{řada konverguje}} \le g(x) + \frac{1}{\delta}\underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{\text{řada konverguje}} = g(x) + \frac{\text{konst}}{\delta}$$

Weierstrass

$$\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x) \text{ konverguje stejnoměrně na } (-\infty, -\delta\rangle \cup \langle \delta, +\infty) \;\; \forall \delta > 0.}$$

- Stále nevíme, zda $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$. Stačí $\langle 0, +\infty)$. Asi ne, zkusíme tedy ověřit platnost NEGACE B-C podmínky stejnoměrné konvergence řad. Chceme ukázat:

$$\boxed{\exists\, \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, m_0 \ge n \;\; \exists\, p \in \mathbb{N} \;\; \exists\, x_m \in \langle 0, +\infty) \text{ tak, že } \left| \sum_{n=m_0+1}^{m_0+p} f_n(x_m) \right| > \varepsilon_0}$$

Hledáme ε_0. Počítejme s $p = n_0$

$$\sum_{n=n_0+1}^{2n_0} f_n(x) = \sum_{n=n_0+1}^{2n_0} \frac{x}{1+n^2x^2} \ge \frac{n_0 x}{1+(2n_0)^2x^2} = g(x) \ge g(x_{MIN})$$

$$\boxed{\forall n:\; 1+n^2x^2 \le 1+(2n_0)^2x^2}$$

$$g'(x) = \frac{n_0(1+(2n_0)^2x^2) - (2n_0)^2 2n_0 x^2}{(1+(2n_0)^2x^2)^2} = \frac{n_0(1-(2n_0)^2x^2)}{\dots}$$

$$x_{MIN} = \frac{1}{2n_0} \Rightarrow g(x_{MIN}) = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Tedy $\exists \boxed{\varepsilon_0 = \frac{1}{8}}$, pro $\forall n \in \mathbb{N}$ vezmeme $n_0 = n$ a $p = 2n_0$ a $x_m = \frac{1}{2n_0}$ a dostaneme negaci B-C podmínky.

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně.

$\boxed{\text{Různé typy konvergencí pro posloupnosti funkcí } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} : I \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}}$

- $\boxed{f_n \to f \text{ v } I}$ bodová konvergence
- $\boxed{f_n \to f \text{ skoro všude v } I}$ bodová konvergence až na množinu malé míry (bude zadefinováno v další kapitole)
- $\boxed{f_n \rightrightarrows f \text{ v } I}$ stejnoměrná konvergence
- $\boxed{\|f_n - f\|_X \to 0 \text{ kde } (X, \|\cdot\|_X) \text{ je normovaný prostor funkcí}}$

konvergence v normě

Speciálně:

▶ $(X, \|\cdot\|_X) = \left(C(I), \|f\|_\infty := \sup_{x \in I} |f(x)|\right)$

$$f_n \to f \text{ v } C(I) \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0 \text{ pro } n \to \infty$$

$$\iff \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ pro } n \to \infty$$

$$\underset{\text{Věta 10.1}}{\iff} f_n \rightrightarrows f \text{ v } I$$

ZÁVĚR: Na prostoru $C(I)$ opatřeného supremovou normou je konvergence v normě ekvivalentní stejnoměrné konvergenci

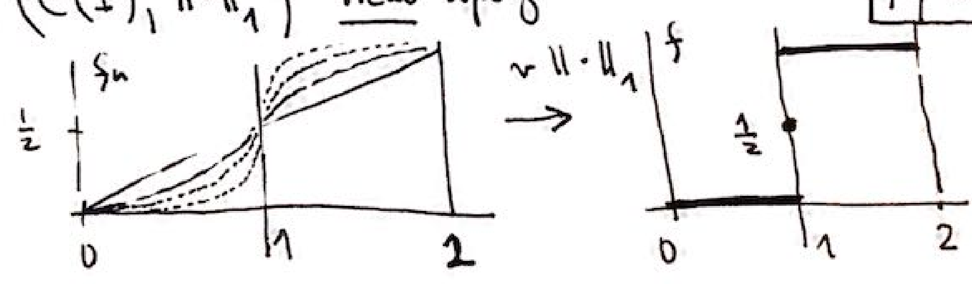
Navíc, dle Věty 10.3 je $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ úplný

▶ $(X, \|\cdot\|_X) = \left(C(I), \|f\|_1 := \int_I |f(x)|\,dx\right).$

Nyní: $f_n \to f \text{ v } C(I) \iff \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pro $n \to \infty$

$$\iff \int_I |f_n(x) - f(x)|\,dx \to 0 \text{ pro } n \to \infty$$

Problém: a) $(C(I), \|\cdot\|_1)$ není úplný $\boxed{f \notin C(I)}$



b) integrální normy jsou užitečné (viz úlohy variačního počtu)

Otázka: Lze zavést prostory funkcí, které budou úplné vzhledem k integrální normě $\|\cdot\|_1$, či obecněji $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < +\infty$?

$$\text{zde} \quad \|f\|_p := \left(\int_I |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Odpověď: Ano. Lebesgueovy prostory $L^p(I)$, kde ale $\int_I |f(x)|^p$ je Lebesgueův integrál.

▶ $(X, \|\cdot\|_X) = (C^1(I), \|f\|_\infty)$ není úplný

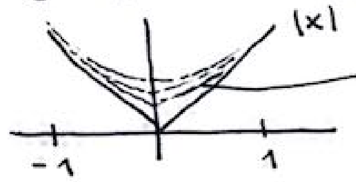
(i) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} \rightrightarrows 0$ tzn. $\left\| \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} - 0 \right\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ale

$f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$ nekonvergují ani bodově

Tedy f_n nekonvergují k C^1-fci

(ii)



$f_n \in C^1(-1,1)$; $\|f_n - |x|\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Updownarrow$

$f_n \rightrightarrows |\mathrm{Id}|$ v $(-1,1)$

ale $f(x) = |x| \notin C^1((-1,1))$.

▶ $(X, \|\cdot\|_X) = (C^1(I); \|f\|_{C^1(I)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$ je úplný

$\boxed{\text{KOMPAKTNÍ MNOŽINY V } C(K),\ K\subset\mathbb{R}^d \text{ kompaktní}}$

Víme a) $K\subset\mathbb{R}^d$ kompaktní $\iff$ K je omezená a uzavřená

Heine-Borelova věta b) $(X, \|\cdot\|)$ Banachův

$\overline{B_1(0)}^{\|\cdot\|_X}$ je kompaktní $\iff$ $\dim X < +\infty$

Speciálně: Jednotková koule v l_2 není kompaktní: nelze z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$, kde

$$x_n = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-té místo}}}{1}, 0, \dots)$$

vybrat konvergentní, neboť $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \neq n_2$

$$\|x_{n_1} - x_{n_2}\|_{l_2} = \sqrt{2}$$

c) $\boxed{C(K)}$ ... prostor spojitých funkcí na K

obsahuje $C^\infty(K)$ ... prostor funkcí, které mají spojité derivace libovolného řádu

obsahuje polynomy všech řádů $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$ (když $K\subset\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim C(K) = +\infty}$

$\boxed{\text{Otázka: Jaké jsou kompaktní množiny v } C(K)?}$

Odpověď: Arzéla-Ascoliho věta.

$\boxed{\text{Věta 10.10}}$ Arzela-Ascoli aneb kritérium kompaktnosti v $C(K)$

Buď $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní. Pak platí:

$\boxed{A \subset C(K)^m = \underbrace{C(K)\times\ldots\times C(K)}_{m\text{-krát}} \text{ je kompaktní}}$ $\iff$ • $\exists K>0 \ \underbrace{\sup_{f\in A}\sup_{x\in K}|f(x)|_{\mathbb{R}^m}\le L}_{\text{stejná omezenost}}$ [omezenost A]

• $\sup_{f\in A}|f(x+h)-f(x)|_{\mathbb{R}^m}\to 0$ pro $|h|_{\mathbb{R}^d}\to 0$

$\boxed{\text{Formulace pro posloupnosti}}$ Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C([a,b])$ splňuje

(P1) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ jsou stejně omezené $\exists K>0 \ \forall n\in\mathbb{N} \ \forall x\in[a,b] \ |f_n(x)|\le K$

(P2) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ jsou stejně stejnoměrně spojité tzn.

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall n\in\mathbb{N} \ \forall x',x''\in[a,b]$$
$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon.$$

Pak $\exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_n\}$, která konverguje v $C([a,b])$.

Dk: Uvaž racionální čísla v $\langle a,b\rangle$. Víme, že tvoří spočetnou množinu. Seřadíme je do posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^\infty$. Nyní konstrukce:

- $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^\infty$ je omezená, existuje $\{f_{1,n}(x_1)\}_{n=1}^\infty$ která konverguje
- $\{f_{1,n}(x_2)\}_{n=1}^\infty$ —‖— , —‖— $\{f_{2,n}(x_2)\}_{n=1}^\infty$ —‖—

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Uvažme posloupnost $\{f_{n,n}\}_{n=1}^\infty$ (Cantorova diagonalizace)

Pak $\boxed{\lim_{n\to\infty} f_{n,n}(x_k) \text{ existuje pro } \forall k\in\mathbb{N}}$

Zbývá ukázat, že $f_{n,n}$ je cauchyovská v supremové normě, tzn. splňuje B-C podmínku stejnoměrné konvergence.

Zvolme $\varepsilon>0$. K němu najdeme $\delta>0$ z podmínky (P2). Pak najdeme l racionálních čísel y_i, $i=1,\ldots,l$, tak, že

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{l}(y_i-\delta,y_i+\delta).$$

Nyní pro každé $t \in [a,b]$ existuje $y_j : |t - y_j| < \delta$.

Máme

$$|f_{n,n}(t) - f_{m,m}(t)| \le |f_{n,n}(t) - f_{n,n}(y_j)| + \underbrace{|f_{n,n}(y_j) - f_{m,m}(y_j)|}_{\text{lze udělat menší než } \varepsilon \ \forall m,n \ge N = \max_{l}\{N_1, \dots, N_l\} \text{ (jen konečně } y_j)} + |f_{m,m}(y_j) - f_{m,m}(t)|$$

$\le 2\varepsilon$ ze stejné stejnoměrné spojitosti viz (P2).

∎

Kapitolu zakončíme Diniho větou (postačující podmínka stejnoměrné konvergence).

<u>Věta 10.11.</u> (Dini)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_n, f \in C(\langle a,b\rangle) \\ \bullet\ f_n \to f \text{ v } \langle a,b\rangle \\ \text{STEJNÁ MONOTONIE } \bullet\ f \le \dots \le f_{n+1} \le f_n \le \dots \le f_1 \text{ v } \langle a,b\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ v } \langle a,b\rangle.$$

Dk: Uvažováním $\psi_n : f_n - f$ a následným přeznačením $f_n = \psi_n$, lze uvažovat, bez újmy na obecnosti, situaci $f_n \ge 0$ a $0 \le f_{n+1} \le f_n \ \forall n$.

Sporem, kdyby $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $\langle a,b\rangle$ tak existuje $\varepsilon_0 > 0$ a nekonečně indexů n tak, že $\sup_{x \in \langle a,b\rangle} f_n(x) \ge \varepsilon_0$. Opět uvažujme jen tato n a f_n.

Protože $f_n \in C(\langle a,b\rangle)$, $\exists\, x_n \in \langle a,b\rangle$ $f_n(x_n) \ge \varepsilon_0$.

Ale $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená $\Longrightarrow \exists \{x_{n_k}\}$ a $x_0 \in \langle a,b\rangle : x_{n_k} \to x_0$

Opět přeznačme a uvažujme $f_n(x_n) \ge \varepsilon_0$ a $x_n \to x_0$.

Pak

$$0 < \varepsilon_0 \le f_l(x_l) \overset{m<l}{\le} f_m(x_l) = f_m(x_l) - f_m(x_0) + f_m(x_0) \le \underbrace{|f_m(x_l) - f_m(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon_0}{3} \text{ ze spojitosti již zafixované } f_m \text{ a } x_l \to x_0} + \underbrace{|f_m(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon_0}{3} \text{ z bodové konvergence}}$$

m zafixuji tak, aby:

Tedy $\varepsilon_0 \le \frac{2\varepsilon_0}{3} \iff 3 \le 2$ ↯

3 Lebesgueův integrál

Cílem této kapitoly je vybudovat integrál pro funkce více proměnných. Mohli bychom budovat vícenásobný Riemannův integrál, což se často dělá. Riemannův integrál však má závažné nedostatky:

- Prostor $\mathcal{R}(\langle a,b\rangle) := \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} ;\ (R)\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty \}$ není úplný metrický prostor. Např. Aproximujme Dirichletovu funkci posloupností, která je rovna 1 jen v konečně mnoha racionálních bodech.

- Limitní přechody

(1) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

či záměny operací

(2) $\frac{d}{dt} \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f'(t)\,dt$

lze ospravedlnit jen za velmi silných předpokladů.

My budeme budovat jiný integrál, tzv. Lebesgueův, který má tu vlastnost, že prostory

$$L^p(\Omega) = \{ u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} ;\ \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \} \text{ s } \|\cdot\|_p := \left(\int_\Omega |\cdot|^p dx\right)^{1/p}$$

jsou úplné normované (tedy Banachovy) prostory pro $p \in \langle 1, \infty)$. Speciálně, pro $p=2$, dostaneme $L^2(\Omega)$, což je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$.

Navíc si Lebesgueův integrál klade za cíl nalézt minimální požadavky, kdy (1) či (2) platí.

Lebesgueův integrál je konstruován ideově jinak než Riemannův integrál. Z pohledu aproximace oboru integrálů máme:

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$(L)\int_a^b f(x) \simeq \sum c_i \mu(M_i) \quad \text{kde}$$

$$M_i := \{x \in \langle a,b\rangle;\ f(x) \in \langle c_i, c_{i+1})\}$$

3.1 Prostor schodovitých funkcí a množiny míry nula

<u>Definice</u> (intervalu v $\mathbb{R}^d$) Jsou-li $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = 1, 2, \dots, d$, pak

$I := (a_1, b_1\rangle \times (a_2, b_2\rangle \times \dots \times (a_d, b_d\rangle$ nazveme <u>interval</u>,

$I^0 := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$ je <u>otevřený interval</u>

$\overline{I} := \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \dots \times \langle a_d, b_d\rangle$ je <u>uzavřený interval</u>

$S := (a_1, b_1\rangle \times \dots \times (a_{i-1}, b_{i-1}\rangle \times \{b_i\} \times \dots \times (a_d, b_d\rangle$ <u>stěna I</u>

Definujeme objem intervalu I resp. I^0 resp. $\overline{I}$ vztahem

$$V(I) := \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

<u>Dělením</u> I nazveme systém navzájem disjunktních intervalů, jejichž sjednocení je celé I a množiny krajních bodů v i-té složce tvoří dělení intervalu (a_i, b_i).

<u>Def.</u> (množiny míry nula). Řekneme, že $E \subset \mathbb{R}^d$ je <u>množina míry nula</u> pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje spočetné pokrytí intervaly I_k, $k = 1, \dots, \infty$, tak, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k) < \varepsilon.$$

Příklad Buď $Q \subseteq \mathbb{R}$ libovolná spočetná množina, pak Q je množina míry nula. Speciálně racionální čísla $\mathbb{Q}$ je množina míry nula.

Dk Buď $Q = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(x_n) \supset Q$, a tedy $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})}$

$$\text{a } \sum_{n=1}^{\infty} V\left(I_{(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon \quad \square$$

Tvrzení Spočetné sjednocení množin míry nula je množina míry nula.

Dk Sami.

Příklad Cantorovo diskontinuum je nespočetná množina míry nula.

Řešení Cantorovo diskontinuum získáme z $\langle 0,1 \rangle$ tak, že $\langle 0,1 \rangle$ rozdělíme na třetiny a vynecháme prostřední třetinu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ a ve zbylých třetinách tento postup opakujeme. Platí

$$x \in C \iff x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ kde } a_n = 0 \text{ nebo } 2.$$

$\boxed{C \text{ je nespočetná}}$ Kdyby C byla spočetná, pak $C = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ &\vdots \\ x_n &= 0.a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} a_{ij} \in \{0,2\}$$

Definujeme-li
$$x = 0.a_1a_2\dots \text{ předpisem } a_i = \begin{cases} 0 & \text{je-li } a_{ii} = 2 \\ 2 & \text{je-li } a_{ii} = 0, \end{cases}$$

pak $x \notin C$ (neboť se liší od všech prvků v $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$).
Tedy C není spočetná.

Dále $C \subset \langle 0,1\rangle \setminus F_n$, kde F_n je sjednocení vynechaných intervalů po n-tém kroku konstrukce C. Tedy

$$V(F_n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^i$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 1 \text{ pro } n\to\infty.$$

Tedy C je pokryta spočetným (konečným) sjednocením otevřených intervalů, jejichž celkový objem jde k nule.

<u>Definice</u> Řekneme, že $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je schodovitá (jednoduchá) funkce (step or simple) pokud existuje interval $I \subset \mathbb{R}^d$ tak, že
$$f \equiv 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^d \setminus I$$
a existuje dělení $\{I_k\}_{k=1}^N$ intervalu I a existují $\{c_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}$ tak, že
$$f(x) = \sum c_k \chi_{I_k}(x)$$

<u>Značení</u> $H := \{ f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R};\ f \text{ je schodovitá} \}$

<u>Definice</u> $f \in H \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx := \sum_{k=1}^N c_k V(I_k)$

Následující tvrzení charakterizuje množiny míry nula pomocí schodovitých funkcí.

<u>Tvrzení</u> $E \subset \mathbb{R}^d$ je množina míry nula $\iff \forall \eta > 0 \; \exists \{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ tak, že

(1) $0 \le h_1 \le h_2 \le \dots \le h_m \le \dots$

(2) $(\forall m \in \mathbb{N}) \quad \int h_m(x)\,dx \le \eta$

(3) $(\forall x \in E) \quad \sup_{m \in \mathbb{N}} h_m(x) \ge 1$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Předpokládáme, že $\boxed{\text{pro dané } \eta > 0}$ existují $\{I_k\}$ tak, že $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k) < \eta$. Definujme

$$h_m(x) := \sum_{k=1}^{m} \chi_{I_k}(x)$$

Pak $h_m \in H$ a (1) platí. Navíc $\int h_m(x) = \sum_{k=1}^{m} V(I_k) < \eta$ pro $\forall m \in \mathbb{N}$, což je (2). Protože $\bigcup I_k$ pokrývá E, tak (3) platí.

$\boxed{\Leftarrow}$ Zkuste si dokázat sami.

$\boxed{\text{Věta 3.1}}$ (Vlastnosti schodovitých funkcí, vlastnosti prostoru H)

(i) $f \in H \Rightarrow |f| \in H$

(ii) $(\forall f \in H) \quad f \ge 0 \Rightarrow \int f\,dx \ge 0$

(iii) H je vektorový prostor ($f, g \in H, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g \in H$, $\alpha f \in H$)

$\boxed{f \le g \;\&\; f, g \in H \;\Downarrow\; \int f \le \int g}$

(iv) $f, g \in H \Rightarrow \max\{f, g\} \in H$, $f^+ \in H$
$\min\{f, g\} \in H$, $f^- \in H$

(v) $f \in H \Rightarrow \left| \int f\,dx \right| \le \int |f|\,dx$

(vi) Jsou-li $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ a $f_k \searrow 0$, pak $\lim_{k \to \infty} \int f_k = 0$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^d : 0 \le \dots \le f_{k+1}(x) \le f_k(x) \le \dots \le f_1(x) \;\&\; \lim_{k \to \infty} f_k(x) = 0}$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Je-li $f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{I_k}(x)$, pak $|f(x)| = \sum |c_k| \chi_{I_k}(x)$ je zřejmě také schodovitá.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Je-li $f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{I_k}(x)$ a $c_k \geq 0$, pak $\int f = \sum c_k V(I_k) \geq 0$.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in H$, pak $\alpha f \in H$.

Jsou-li $f, g \in H$ a $f \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d - I^f$ a $g \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d - I^g$, pak snadno sestrojíme interval I a jeho dělení $\{I_k\}$ tak, že $\{I_k\}|_{I^f}$ je zjemněním (dělením) $\{I_k^f\}_{k=1}^{N_f}$ a $\{I_k\}|_{I^g}$ je zjemněním $\{I_k^g\}_{k=1}^{N_g}$. Na intervalech $I_k \notin I^f \cup I^g$ položíme $c_k = 0$.

Na $I_k \subset I^f \setminus I^g$ je $c_k = c_k^f$ a na $I_k \subset I^g \setminus I^f$ položíme $c_k = c_k^g$. Nakonec na $I_k \subset I^f \cap I^g$ klademe $c_k = c_k^f + c_k^g$.

Tak $f+g = \sum c_k \chi_{I_k} \in H$.

$\boxed{\text{Ad (iv)}}$ Protože $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$, $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\{|f-g| + f + g\}$ a $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$, tak tvrzení plyne z (iii) a (i).

$\boxed{\text{Ad (v)}}$ Protože $-|f| \leq f \leq |f|$, tak dle (ii) aplikované na $|f|+f$ a $|f|-f$ a s použitím linearity dostáváme

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|.$$

$\boxed{\text{Ad (vi)}}$ Chceme ukázat, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0) \quad \int f_k \leq \varepsilon.$$

[1] <u>Značení</u> • f_1 je nula vně I (f_k jsou monotónní $\Rightarrow f_k = 0$ vně I)

$$M := \max_{x \in I} f_1(x)$$

• $f_k \in H \Rightarrow \exists \{I_{kj}\}_{j=1}^{N_j} (\exists f_{kj} \in \mathbb{R})\ f_k = \sum_{j=1}^{N_j} f_{kj} \chi_{kj}$

S_k .... množina všech stěn dělení I_{kj}

$$S_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \cup \{\text{zbylé stěny } \partial I\}$$

S_∞ je spočetná – jednotlivé stěny z S_∞ lze oindexovat přirozenými čísly

[2] Pokrytí $\overline{I}$ $\quad$ $\varepsilon > $ dáno. Polož $\eta := \frac{\varepsilon}{2M}$ a $\eta' = \frac{\varepsilon}{2V(I)}$

(a) pokrytí S_∞ $\quad$ $\forall$ stěnu S_i z S_∞ pokryjeme otevřeným intervalem K_i takže $V(K_i) \leq \frac{\eta}{2^i}$

Potom $\sum_{i=1}^{\infty} V(K_i) < \eta$.

(b) pokrytí $I \setminus S_\infty$

$I \setminus S_k$ je otevřená množina a f_k je na $I \setminus S_k$ spojitá

$$\forall x \in I \setminus S_\infty \ (\exists k_0 = k_0(x)) (\forall k \geq k_0) \ f_k(x) < \eta'$$
(speciálně $f_{k_0}(x) < \eta'$)

Protože f_{k_0} je po částech konstantní, tak existuje otevřený interval $J(x)$ takže $f_{k_0}(y) < \eta'$ pro všechna $y \in J(x)$

$$\overline{I} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup \bigcup_{x \in \overline{I} \setminus S_\infty} J(x)$$, ale $\overline{I}$ je kompakt

$$\Longrightarrow \exists K_{i_1}, \dots, K_{i_m}, x_1, \dots, x_p \text{ takže } \overline{I} \subset \bigcup_{j=1}^{m} K_{i_j} \cup \bigcup_{i=1}^{p} J(x_i)$$

vzájemně disjunktní

[3] Definujme $k_0^* = \max_{i=1,\dots,p} \{ k_0(x_i) \}$

Pro $\forall k \geq k_0^*$ a $\forall x \in I \setminus S_\infty$: $f_k(x) < \eta'$

a zároveň $I \setminus S_\infty \subset \bigcup_{i=1}^{p} J(x_i)$ & $\sum_{i=1}^{p} V(J(x_i)) \leq V(I)$

$$\int f_k \leq \int f_{k_0^*} \leq M \sum_{j=1}^{m} V(K_{i_j}) + \eta' V(I)$$
$$\leq M\eta + \eta' V(I) = \varepsilon$$

$\boxed{\text{VA}}$

Definice Řekneme, že nějaká vlastnost (např. $f=g$, $f\le g, \dots$) platí *skoro všude* (almost everywhere) a píšeme s.v. (a.e.) $\equiv^{df}$ vlastnost platí $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus Z$, kde Z je množina míry nula.

Věta 3.2 (Další vlastnosti schodovitých funkcí). Buď $f, g \in H$

(i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ a $f_n \searrow 0$ s.v. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = 0$

(ii) $f=g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$

(iii) $f \le g$ s.v. $\Rightarrow \int f \le \int g$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Dokážeme tvrzení $\boxed{\text{nejdříve}}$ za silnějších předpokladů:

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ a $\quad 0 \le \dots f_{n+1}(x) \le f_n(x) \le \dots \le f_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

$\lim f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus Z$,

kde Z je množ. míry nula tzn. $\exists \{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$

(i) $0 \le h_1(x) \le \dots \le h_n(x) \le \dots$

(ii) $(\forall n) \quad \int h_n \le \frac{\varepsilon}{M} \qquad (M := \max f_1)$

(iii) $(\forall x \in Z) \quad \sup\limits_n h_n(x) \ge 1$

Uvažme fce $\boxed{f_n - M h_n}$. jsou nerostoucí všude

. $f_n \ge 0 \Rightarrow \int f_n \ge 0 \; (\forall n)$. $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - M h_n(x)) \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - M h_n(x))^+ = 0$

Dle Věty 3.1 (vi)

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n(x) - M h_n(x))^+ = 0,$$

což implikuje

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n(x) - M h_n(x)) \le 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \leq M \lim_{n\to\infty} \int h_n \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ $\{f-g\}_{n=1}^{\infty}$ je konstantní posloupnost, která je
(triviálně) monotónní pro všechna x a
(triviálně) $\lim_{n\to\infty} f(x)-g(x) = 0$ pro s.v. x.

Tedy dle právě dokázaného tvrzení ($\boxed{\text{Ad (i)}}$):

$$\lim_{n\to\infty} \int (f-g) = 0 \Rightarrow \int f = \int g$$

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ $0 \leq |g-f| = g-f$ s.v. $\Rightarrow$ $0 \leq \int |g-f| = \int g-f \Rightarrow$

$$\underset{\text{lineárně}}{\Rightarrow} \int f \leq \int g.$$

Nyní dokážeme tvrzení (i) za předpokladů uvedených ve větě.

$\boxed{\text{Ad (i)}}$ $\boxed{\text{PODRUHÉ}}$

Definujme $\tilde{f}_n$ takto: $\tilde{f}_1 = f_1^+$
$\tilde{f}_i = \min\{f_i^+, \tilde{f}_{i-1}\}$

Pak není těžké ověřit, že

- $\tilde{f}_n$ je nerostoucí $\forall x \in \mathbb{R}^d$
- $\tilde{f}_n = f_n$ s.v.

$\Bigg\}$ $\underset{\text{ze silnějších předp.}}{\overset{\text{Tvrzení (i) dokázané}}{\Longrightarrow}}$

$\lim \int \tilde{f}_n = 0$ a dle (ii): $\int \tilde{f}_n = \int f_n \Rightarrow$

$\lim \int f_n = 0$ ∎

3.2 Prostory měřitelných a Lebesgueovsky integrovatelných fcí M^+, L^+, M, L.

Definice • $\boxed{f \in M^+}$ (prostor měřitelných nezáporných funkcí)

$\stackrel{df.}{\equiv} \exists \{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$, $h_i \geq 0$ a $\underbrace{h_i \nearrow f \text{ s.v.}}$

(tzn. $\forall x \in \mathbb{R}^d - Z$: • $0 \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq \dots f(x)$
• $\lim_{i \to \infty} h_i(x) = f(x)$,

Z je množ. míry nula)

PROSTOR LEBESGUEOVSKY INTEGROVAT. NEZÁPORNÝCH FUNKCÍ • $\boxed{f \in L^+}$ $\stackrel{df}{\equiv}$ $f \in M^+$ a posloupnost $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ z definice prostoru M^+ navíc splňují: $\exists K > 0$ $\forall i \int h_i \leq K$.

Pro $f \in L^+$ definujeme Lebesgueův integrál takto:

$$\int f = \lim_{i \to \infty} \int h_i$$

⌈Povšimněme si, že $h_i \leq h_j \Rightarrow \int h_i \leq \int h_j \leq K$ pro $i < j$, $i, j \in \mathbb{N}$ lib. Tedy $\left\{\int h_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ tvoří monotónní omezenou posloupnost čísel. Z MAF 1 víme, že limita takové posloupnosti vždy existuje. ⌋

V následujících dvou větách budeme nejdříve zkoumat strukturální vlastnosti L^+ včetně nezávislosti definice integrálu na volbě posloupnosti $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$.
Potom budeme zkoumat záměnu

$\int$ a limity.

$\boxed{\text{Věta}}$ 3.3 Buď $f, g \in L^+$. Potom

(i) $f \le g$ s.v. $\Rightarrow$ $\int f \le \int g$

(ii) $f = g$ s.v. $\Rightarrow$ $\int f = \int g$

(iii) $\int f$ nezávisí na volbě $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$

(iv) f je konečná s.v.

(v) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L^+$ (to však neznamená, že L^+ je vektorový prostor. Proč?)

(vi) $\max\{f, g\} \in L^+$, $\min\{f, g\} \in L^+$.

Dk K $f \in L^+$: $\exists\, h_i \ge 0$, $h_i \in H$, $h_i \nearrow f$ s.v. a $\exists K > 0$ $\forall i$ $\int h_i \le K$

K $g \in L^+$: $\exists\, l_i \ge 0$, $l_i \in H$, $l_i \nearrow g$ s.v. —"— $\int l_i \le K$

$\boxed{\text{Ad (i)}}$ $h_i - l_j \searrow h_i - g$ $(j \to \infty)$, protože $f - g \le 0$, tak $h_i - g \le 0$ s.v. $(\forall i)$ $\Rightarrow (h_i - l_j)^+ \searrow 0$ s.v. pro $j \to \infty$

$$\Rightarrow \int (h_i - l_j)^+ \to 0 \quad j \to \infty$$

Tedy $\lim\limits_{j\to\infty} \int h_i - l_j \le 0 \Rightarrow \int h_i \le \lim\limits_{j \to \infty} \int l_j = \int g$

$\downarrow i \to \infty$

$$\int f \le \int g$$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$

plyne z (i) neboť $f = g$ s.v. $\Rightarrow f \ge g$ s.v & $g \ge f$ s.v.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$

Uvažujme dvě posloupnosti $\{h_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ & $\{h_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ tak, že $h_i^1 \nearrow f^1 = f$ a $h_i^2 \nearrow f^2 = f$

Pak $f_1 = f_2$ s.v. a dle (ii) $\int f_1 = \int f_2$

$\boxed{\text{Ad (iv)}}$

$Z_1 := \{x \in \mathbb{R}^d;$ neplatí $h_i(x) \nearrow f(x)\}$ je množ. míry nula.

Definujme $Z_2 := \{x \in \mathbb{R}^d \setminus Z_1;\ f(x) = \infty\}$. Cílem je ukázat, že Z_2 je mn. míry nula. Definujme $H_i = \frac{\varepsilon}{K} h_i \in H$. Pak

(α) $H_i \ge 0$, (β) $(\forall i)$ $\int H_i = \frac{\varepsilon}{K} \int h_i \le \varepsilon$,

(γ) $\forall x \in Z_2$ $\sup\limits_i H_i(x) \ge 1$ (neboť $h_i \nearrow \infty$ na Z_2).

Tedy Z_2 je dle "charakterizace mn. míry nula" mn. míry nula.

$\boxed{\text{Ad (v)}}$ Rozmyslete sami.

$\boxed{\text{Ad (vi)}}$ Označme $H_i = \max_x \{h_i, l_i\}$.

Protože $h_i, l_i \in H \Rightarrow H_i \in H$ dle Věty 3.1 (iv).

Navíc:
- $H_i \nearrow \max\{f, g\}$
- $(\forall i) \int \max\{f, g\} \leq 2K$

$\Rightarrow \max\{f, g\} \in \mathcal{L}^+$. ☒

$\boxed{\text{Věta 3.4}}$ (Limitní průchod v L^+)

Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^+$, $f_n \nearrow f$ s.v. a $(\exists K)(\forall n \in \mathbb{N})$ $\int f_n \leq K$.

Pak

$$\int f = \left(\int \lim f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

tj. záměna limity a $\int$ platí.

Dk: $f_n \in L^+$: $\exists \{h_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$, $h_{nj} \geq 0$, $h_{nj} \in H$, $h_{nj} \nearrow f_n$ s.v., tj $\int h_{nj} \leq K$

Definujme $H_j = \max\limits_{1\leq n\leq j} h_{nj} \in H$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdot\ h_{11} & \leq & h_{12} & \leq & h_{13} & \leq & \cdots & \leq & h_{1j} & \leq & \cdots & \leq & f_1 \\
\cdot\ h_{21} & \leq & h_{22} & \leq & h_{23} & \leq & \cdots & \leq & h_{2j} & \leq & \cdots & \leq & f_2 \\
\cdot\ h_{31} & \leq & h_{32} & \leq & h_{33} & \leq & \cdots & \leq & h_{3j} & \leq & \cdots & \leq & f_3 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Zřejmě: $\overset{\in H}{H_j}$ je monotónní : $h^* = \lim\limits_{j\to\infty} H_j$ a tedy $\int h^* = \lim\limits_{j\to\infty} \int H_j$

Platí:

$$\left.\begin{array}{l}
h_{nj} \leq H_j \leq f_j \\
\downarrow j\to\infty \\
f_n \leq h_* \leq f \\
\downarrow n\to\infty \\
f \leq h_* \leq f
\end{array}\right\} \Rightarrow f = h_* \text{ (s.v.)}$$

Integrací:

$$\int h_{nj} \leq \int H_j \leq \int f_j$$

$j\to\infty \downarrow$

$$\int f_n \leq \int f \leq \lim_{j\to\infty} \int f_j \qquad (f = h_* \text{ s.v.})$$

$n\to\infty \downarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

∎

Definice Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\boxed{f \in L}$ (f je lebesgueovsky integrovatelná) $\equiv f^+, f^- \in L^+$

a

$$(\mathcal{L}) \int f \overset{df.}{=} \int f^+ - \int f^-$$

Také $\boxed{f \in M}$ (f je lebesgueovsky měřitelná) $\equiv f^+, f^- \in M^+$

Poznámka (důležitá) Lze definovat "$f \in L$" také tak, že existují $f_1, f_2 \in L^+$: $f = f_1 - f_2$ s.v. a $\int f = \int f_1 - \int f_2$

Vidíme, že definice nezávisí na rozkladu:

Máme: $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \Rightarrow f^+ + f_2 = f_1 + f^-$ s.v. a $f^+, f^-, f_1, f_2 \in L^+$

tedy:

$$\int f^+ + f_2 = \int f_1 + f^-$$

$$\Downarrow$$

$$\int f^+ - \int f^- = \int f_1 - \int f_2$$

a oba rozklady dávají stejný výsledek.

$\boxed{\text{Věta}}$ 3.5 (Struktura fcí z L) Buď $f, g \in L$. Pak

(i) L je vektorový prostor a $(\mathcal{L})\int$ je aditivní, tj.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha f + \beta g \in L$ a $\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g$

(ii) • $f \geq g$ s.v. $\Rightarrow \int f \geq \int g$

• $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$

(iii) Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní: $|f| \in L$.

(iv) L je „svaz": $\max\{f, g\} \in L$, $\min\{f, g\} \in L$

(v) f je konečná s.v.

(Dk) $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Přímo z definice plyne: je-li $f \in L$, pak $-f \in L$ (ověřte!)

Také: je-li $\alpha > 0$ a $f \in L$, pak $\alpha f \in L$. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Odsud však plyne:

je-li $\alpha < 0$, pak $-\alpha > 0$, pak $-\alpha f \in L$

a pak $-(-\alpha f) = \alpha f \in L$.

Tedy L je lineární prostor.

Aditivita (L)$\int$: $f+g = f^+ - f^- + (g^+ - g^-) = (f+g)^+ - (f+g)^-$,

a $(f+g)^+ \in L^+$ a $(f+g)^- \in L^+$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Protože $f^+ - f^- \geq g^+ - g^-$ s.v.

tak $f^+ + g^- \geq f^- + g^+$ s.v. & $f^+ + g^- \in L^+$

$f^- + g^+ \in L^+$

a tedy dle Věty 3.3 (i):

$$\int f^+ + \int g^- = \int f^+ + g^- \geq \int f^- + g^+ = \int f^- + \int g^+$$

Věta 3.3 (v)

což implikuje

$$\int f^+ - f^- = \int f^+ - \int f^- \geq \int g^+ - \int g^- = \int g^+ - g^-$$

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ plyne ze skutečnosti, že $|f| = f^+ + f^-$ a z definice. Dokázali jsme implikaci:

$$f \in L \Longrightarrow |f| \in L.$$

$\boxed{\text{Ad (iv)}}$ $\max\{f,g\} = f + (g-f)^+$ (rozmyslí)

plyne ze vztahu

$\boxed{\text{Ad (v)}}$ plyne z Věty 3.3.: f^+, f^- jsou konečné až na mn. míry nula.

3.3 Věty o záměně integrálu a limity pro posloupnosti a řady funkcí a kritéria, kdy $\lim f_n \in L$

Věta 3.6 (Levi)

Buď $\left\{\begin{array}{l} \cdot \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L \\ \cdot f_n \nearrow f \text{ s.v.} \\ \cdot (\exists K>0)\ \forall n \int |f_n| \leq K \end{array}\right\}$ Pak $\left(\int \lim f_n = \right) \int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$

Dk Využijeme Větu 3.4. Definujme $g_n = f_n + f_1^-$.

Protože $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$

tak $f_1 + f_1^- \leq f_2 + f_1^- \leq \dots \leq f + f_1^-$

Navíc $f_1 + f_1^- = f_1^+ - f_1^- + f_1^- = f_1^+ \geq 0$.

Tedy $g_n \geq 0$ a $g_n \nearrow f + f_1^-$ a $(\forall n) \int g_n \leq 2K$

Dle Věty 3.4:

$$\int \lim f_n + \int f_1^- = \int \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n + \int f_1^-$$

a porovnáním podtržených výrazů dostáváme tvrzení.

Věta 3.7 (Levi pro řady)

$\left.\begin{array}{l} \cdot \{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L,\ f_i \geq 0 \\ \cdot (\exists K>0)(\forall m) \int \sum\limits_{i=1}^{m} f_i \leq K \end{array}\right\} \Rightarrow$ 1) $F := \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i \in L$ 2) $\int F = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int f_i$

Dk Užijme Větu 3.6 na posloupnost částečných součtů:

$g_m := \sum\limits_{i=1}^{m} f_i$. (Zřejmě: $\cdot\ g_m \in L \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$\cdot\ g_m \nearrow F$

$\cdot\ (\exists K)(\forall m) \int g_m \leq K$

tedy $\int F = \lim \int g_m = \lim \sum\limits_{i=1}^{m} \int f_i$ $\square$

Věta 3.8 (O obrácení výroku: "$f=0$ s.v. $\Rightarrow \int f = 0$")

Je-li $f \in L$, $f \geq 0$ a $\int f = 0$, pak $f = 0$ s.v.

Dk Definujme $F_k = kf$ ($F_k(x) = kf(x)$ $k \in \mathbb{N}$).

Zřejmě $F_k \geq 0$ s.v., neklesající s.v. a $\forall k \in \mathbb{N}$ $\int F_k = 0$

Tedy, dle Věty 3.4: $F_k \nearrow F$ a

$$\int F = \int \lim_{k\to\infty} F_k = \lim_{k\to\infty} \int F_k = \lim_{k\to\infty} k \int f = 0$$

Tedy $F \in L$, $\int F = 0$ a F je konečná s.v.

Uvažujme $M = \{x;\, f(x) > 0\}$. Pak $F(x) = \infty$ $\forall x \in M$.

Tedy M je množina míry nula. ∎

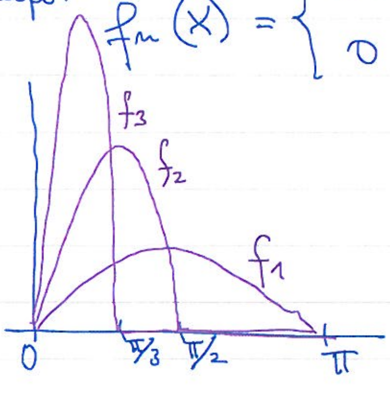
Věta 3.9 (Fatouovo lemma – kritérium garantující náležitost $\lim f_n$ do L)

nechť $\left\{\begin{array}{l} \cdot\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L,\ \boxed{f_n \geq 0} \\ \cdot\ f_n \to f \quad \text{s.v.} \\ \cdot\ (\exists K)(\forall n \in \mathbb{N}) \int f_n \leq K \end{array}\right\}$ pak $\left\{\begin{array}{l} \cdot\ f \in L \\ \cdot\ \int f \leq K. \end{array}\right.$

Pozorování Fatouovo lemma neříká nic o záměně $\lim_{n\to\infty}$ a $\int$.

Záměna za předpokladů V.3.9. obecně NEPLATÍ. Uvažujme

mapi. $f_n(x) = \begin{cases} n \sin nx & x \in \langle 0, \frac{\pi}{n}\rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$, pak



$\cdot$ $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\cdot$ $\int f_n = \int_0^{\pi/n} n \sin nx = \left[-\cos nx\right]_0^{\pi/n} = 2$

$\cdot$ $f = 0$, $f \in L$, $0 = \int f < \lim \int f_n = 2$.

Dk Věty 3.9 Definujme $F_k = \inf\{f_k, f_{k+1}, \dots\} \nearrow f$. Pak dle lemmatu musí platit $F_k \in L$. Navíc $\forall k \in \mathbb{N}: \int F_k \le K$.
Dle Leviho věty 3.6: $\int f = \lim_{k\to\infty} \int F_k \le K$ a $f \in L$,
což jsme chtěli ukázat. ∎

Lemma (užitečné)

Pokud $\left\{\begin{array}{l} f_k, g_k \in L,\ k \in \mathbb{N} \\ f_0, g_0 \in L \\ f_k \ge f_0,\ g_k \le g_0 \\ (\forall k \in \mathbb{N}) \end{array}\right\}$ pak $\begin{array}{l} F = \inf\{f_1, f_2, \dots\} \in L \\ G = \sup\{g_1, g_2, \dots\} \in L \end{array}$

Dk $G_k := \max\{g_1, \dots, g_k\} \in L$, $G_k \nearrow G \overset{\text{Levi}}{\Longrightarrow} G \in L$;
Protože $\inf\{f_1, \dots\} = -\sup\{-f_1, -f_2, \dots\}$. ∎

Věta 3.10 (Lebesgueova – o integrovatelné majorantě)

Pokud $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L \\ \bullet\ f_n \to f \text{ s.v.} \\ \bullet\ (\exists g \in L)(\forall n \in \mathbb{N})\ |f_n| \le g \end{array}\right\}$ pak $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ f \in L \\ \bullet\ \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n \end{array}\right.$

Dk Definujme
$$F_k = \inf_x \{f_k, f_{k+1}, \dots\} \nearrow f \text{ s.v.}$$
$$G_k = \sup_x \{f_k, f_{k+1}, \dots\} \searrow f \text{ s.v.}$$

Pak
$$-g \le F_k \le f_k \le G_k \le g$$

Integrací
$$-\int g \le \int F_k \le \int f_k \le \int G_k \le g$$

Provedeme $\lim_{k\to\infty}$ a tím, že $\{F_k\}$ a $\{G_k\}$ splňují předpoklady Leviho věty 3.6. Tedy ($k \to \infty$)
$$\int f \le \lim_{k\to\infty} \int f_k \le \int f,$$
což jsme chtěli ukázat. ∎

Tvrzení (užitečné varianty Lebesgueovy věty)

(1) Nechť platí (i) a (ii) z Věty 3.10 a $\exists g, h \in L: h \le f_n \le g$, pak platí tvrzení věty 10.11.

(2) Nechť platí (i) a (ii) a $(\exists g \in L)$ $|f| \le g$. Pak $f \in L$.

Dk $\boxed{\text{Ad}(1)}$ jednoduché (sami)

$\boxed{\text{Ad}(2)}$ Definujme $\tilde{f}_n = \max\{\min\{f_n, g\}, -g\}$

oříznutí fcí f_n ze zdola $-g$ a ze shora fcí g.

Pak $|\tilde{f}_n| \le g$ a $\tilde{f}_n \longrightarrow f$ s.v.

Dle Věty 3.10 dostáváme, že $f \in L$. ▨

$\boxed{\text{Příklady}}$ (1) $f_n(x) = \chi_{[-n,n]} \operatorname{sgn} x$

Pak
- $f_n(x) \longrightarrow \operatorname{sgn} x$
- $\int f_n = 0$
- $f_n \in L$

AVŠAK $f \notin L$

$f \in M$ ale f^+ a $f^- \notin L^+$

Stejné chování vykazuje oscilující $f_n(x) = \chi_{[-2\pi n, 2\pi n]} \sin x$

Poučení z příkladu (1):

(i) Ve Fatouově lemmatu nelze vypustit předpoklad $f_n \ge 0$.

(ii) Posloupnost $\{f_n\}$ nemá integrovatelnou majorantu.

(2) Koncentrace v bodě

$$f_n = \begin{cases} n & \text{na } \left(-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}\right) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Pak
- $f_n \to 0$ s.v.
- $(\forall n)$ $\int f_n = 2a$

$\cancel{\Rightarrow}$ $\int \lim f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$

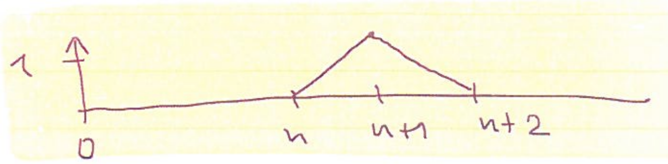
neboť

$$0 = \int \lim f_n < \lim \int f_n = 2a$$

Dle Fatouova lemmatu $0 \in L$, což je fajn, ale závěr neplatí: NEMÁM MAJORANTU ani MONOTÓNII

③ Únik hmoty do nekonečna

Buď f_n jako na obrázku:



Pak $0 \le f_n \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad 0 = \int \lim f_n < \lim \int f_n = 1$

$\int f_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Obecnější komentář:

> OSCILACE, KONCENTRACE A ROZPTYL (DISPERSE) V NEKONEČNÉM PROSTORU jsou zajímavé komplikované jevy, kdy je třeba dávat pozor na zachovávání vlastností. Dalším důvodem jsou SKOKOVÉ NESPOJITOSTI (RÁZOVÉ VLNY).
>
> nečiní komplikace v integraci

④

$f_n = -\frac{1}{n}$ a $f_n \nearrow 0$ v $\mathbb{R}$, ale NEPLATÍ $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ neboť $f_n \notin L$.

⑤

Pomocí Leviho věty pro řady můžeme elegantně spočítat $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}$

Platí:

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1} = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty x e^{-nx} \overset{\text{Levi}}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x e^{-nx} \qquad \left(x \downarrow 1, \quad e^{-nx} \downarrow \frac{-e^{-nx}}{n} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \left[-\frac{x e^{-nx}}{n} - \frac{e^{-nx}}{n^2} \right]_0^\infty = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty.$$

per partes

Použití Leviho věty plyne z pozorování:

$$\int \sum_{n=1}^k x e^{-nx} \le \sum_1^k \int_0^\infty x e^{-nx} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

3.4 Měřitelné funkce, měřitelné množiny, σ-algebry, míry

Nejdříve provedeme shrnutí zavedených struktur včetně dvojného rozšíření, klíčovým pojmem této sekce bude MĚŘITELNOST fcí a množin a pojem MÍRA.

(i) H ... vektorový prostor schodovitých funkcí

$f \in H \iff \exists\, I \subset \mathbb{R}^d$ omezený interval a jeho dělení $\{I_j\}_{j=1}^N$ tak, že
$$f = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{I_j} \iff f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{I_j}(x)$$

pro jistá $c_j \in \mathbb{R}$

$$f \in H \Rightarrow \int f = \sum_{j=1}^N c_j V(I_j)$$

Klíčové vlastnosti:
- $f \in H \Rightarrow |f| \in H$
- $\{h_i\} \subset H,\ h_i \searrow 0 \Rightarrow \int h_i \to 0$

(ii) M^+ ... $f \geq 0$; $\exists \{h_i\} \subset H$ tak, že $h_i \nearrow f$

$f \in M^+ \Rightarrow \int f = \lim_{i\to\infty} \int h_i$ (buď $+\infty$ nebo $\in \mathbb{R}_0^+$)

L^+ ... $\{f \in M^+;\ \exists K > 0\ \forall i \int h_i \leq K\}$

$f \in L^+ \Rightarrow \int f = \lim \int h_i \in \mathbb{R}_0^+$

(M^+, L^+ nejsou vektorové prostory)

(iii) M ... $\{f;\ f^+, f^- \in M^+\}$

L^* ... $\{f \in M;\ \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}\}$

L ... $\{f \in M;\ \int f := \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R}\}$

PLATÍ: $L \subset L^* \subset M$; $M^+ \subset L^*$

Věta 3.11 (Shrnutí základních vlastností M)

① $\{f_n\} \subset M$ a $f_n \to f$ s.v. $\Rightarrow f \in M$

② $f, g, \{f_n\} \subset M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \underbrace{f \pm g, \alpha f}_{M \text{ je vektorový prostor}}, fg, \frac{f}{g}_{\neq 0}, \underbrace{\max\{f,g\}, \min\{f,g\}}_{M \text{ je svaz}} \in M$

$\Rightarrow \sup\{f_n\}, \inf\{f_n\}, \limsup\{f_n\}, \liminf\{f_n\} \in M$

③ f spojitá $\Rightarrow f \in M$

④ $F: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ spojitá, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_s): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$ a $f_i \in M$
$\Rightarrow F \circ \vec{f} \in M$

Důkaz je vynechán (zkuste si promyslet jak bychom dokazovali ① a ②). Důležitý je celkový význam této věty: "měřitelnost fcí" je uzavřená na spoustu operací: $\pm, \cdot, -, \max, \min, \sup, \inf, \limsup, \liminf$

Ale <u>nikoliv</u> na složení.

Platí: Každá funkce se dá napsat jako složení dvou měřitelných zobrazení. Ukážeme, že existují χ_Ω, které <u>NEJSOU</u> měřitelné. Obecně tedy nelze zobecnit tvrzení ④ pro $F \in M$ a $f_i \in M$.

Mějme nyní $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a $f \in L(\mathbb{R}^d)$ či $f \in M(\mathbb{R}^d)$

Ptáme se, zda
$$f\chi_\Omega \overset{df.}{=} \begin{cases} f & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d - \Omega \end{cases}$$
patří do $L(\mathbb{R}^d)$ resp. $M(\mathbb{R}^d)$?

! Obecně to neplatí !

$\boxed{\text{Def}}$ (měřitelné množiny)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je měřitelná $\iff \chi_\Omega \in M$

$\boxed{\text{Def}}$ $\mathcal{P}(X)$ ... systém všech podmnožin X (potenční množina)

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ... —‖— $\mathbb{R}^d$

$\Lambda(\mathbb{R}^d)$ ... systém všech <u>měřitelných</u> podmnožin $\mathbb{R}^d$

Platí: $\Lambda(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ [NÍŽE ukážeme více $\Lambda(\mathbb{R}^d) \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$]

$\boxed{\text{Def}}$ Zobrazení

$\lambda_d : \Lambda(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_0^+$ je definováno vztahem

$$\lambda_d(\Omega) = \int \chi_\Omega$$

Pozorování

$$\lambda_d\left((0,1)^d\right) = \int \chi_{(0,1)^d} = V\left((0,1)^d\right) = 1$$

λ_d budeme později nazývat <u>Lebesgueova míra</u>

$\boxed{\text{Def.}}$ Buď $f \geq 0$ & $f \in M$. Zobrazení

$\nu_f : \Lambda(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_0^+$ definujeme

předpisem $\nu_f(\Omega) = \int f \chi_\Omega$

Pozorování: $\lambda_d(\Omega) = \nu_1(\Omega)$. Ukážeme později, že ν_f jsou míry, tj. ν_f splňují vlastnosti, které uvedeme v definici míry.

Ještě předtím si ukážeme existenci <u>neměřitelné množiny</u> (a tedy také neměřitelné funkce).

Příklad (konstrukce neměřitelné množiny) Tato konstrukce je založena na Axiomu výběru a jednoduchém vztahu ekvivalence mezi reálnými čísly z $[0,1]$.

Řekneme, že $x, y \in [0,1]$ jsou ekvivalentní, $x \sim y$, právě když $x - y \in \mathbb{Q}$ (rozdíl je racionální)

(určitě platí: $x \sim x$; $x \sim y \Rightarrow y \sim x$; $x \sim y \;\&\; y \sim z \Rightarrow x \sim z$ tedy $x \sim y$ je ekvivalence)

Nyní rozdělíme $[0,1]$ do tříd ekvivalence, např.

- $\mathbb{Q} \subset [0,1]$ tvoří jednu třídu
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + p$, kde $p \in \mathbb{Q}$ tak, že $\frac{\sqrt{2}}{2} + p \in [0,1]$ tvoří další třídu
- atd

Dvě třídy ekvivalence jsou buď stejné nebo disjunktní. A platí
$$[0,1] = \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}$$
kde $\mathcal{E}_{\alpha}$ je jedna třída ekvivalence.

Nyní definujme naši množinu
$$\mathcal{N} = \{x_{\alpha}\}_{\alpha}$$
kde $x_{\alpha} \in \mathcal{E}_{\alpha}$ je jediný z $\mathcal{E}_{\alpha}$.

Tato konstrukce je možná díky axiomu výběru: Buď E množina a $\{E_{\alpha}\}$ soubor neprázdných podmnožin E, přičemž množina indexů není spočetná. Pak existuje funkce $\alpha \mapsto x_{\alpha}$ (výběrová funkce) tak, že $x_{\alpha} \in E_{\alpha}$ $\forall \alpha$.

$\boxed{\text{Ukážeme, že } \mathcal{N} \text{ není měřitelná.}}$ Sporem. Nechť $\mathcal{N}$ je měřitelná.

Uvažujme posunutí množiny $\mathcal{N}$ typu
$$\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + r_k$$
kde $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ představuje všechna racionální čísla z $\langle -1, 1 \rangle$

Není obtížné ověřit (OVĚŘTE SI), že:

- N_k jsou navzájem disjunktní
- $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2]$.

Kdyby N byla měřitelná, pak jsou N_k také měřitelné $\forall k \in \mathbb{N}$. Protože N_k jsou navzájem disjunktní, tak

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N_k) \leq 3.$$

Protože N_k jsou jen posunutí N tak $\lambda_1(N_k) = \lambda_1(N)$.

Tedy

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N) \leq 3,$$

což vede ke sporu jak v případě kdy $\lambda_1(N) = 0$, nebo když $\lambda_1(N) > 0$

KZ

Def. Soubor podmnožin Σ množiny X se nazývá σ-algebra

- $X \in \Sigma$
- $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$
- $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

$\boxed{(X, \Sigma) \text{ měřitelný prostor}}$

Příklady (i) $\{\emptyset, X\}$ je σ-algebra
(ii) $\mathcal{P}(X)$ je σ-algebra
(iii) $\{A \subset X;\ A \text{ je konečná nebo } X - A \text{ je konečná}\}$ je σ-algebra

Pro úplnost připomeňme definice topologie a topologického prostoru.

$\boxed{\text{Def}}$ Řekneme, že soubor podmnožin $\mathcal{T}$ množiny X je topologie pokud
- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
- $A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$ se nazývá topologický prostor

Příklady (i) $\{\emptyset, X\}$ je topologie

(ii) $\{\emptyset, \mathbb{R}, (0,1)\}$ je topologie, ale není σ-algebra

(iii) Buď P topologický prostor. Označme $\mathcal{B}(P)$ σ-algebru generovanou souborem všech otevřených podmnožin P. Nazývá se σ-algebra borelovských množin. Obsahuje uzavřené množiny, všechny spočetné průniky otevřených množin (tzv. množiny G_δ), všechna spočetná sjednocení uzavřených množin (tzv. množiny F_σ), atd.

Definice (míry) Buď Σ soubor podmnožin X. Pak zobrazení $\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je míra (measure) pokud
1) Σ je σ-algebra
2) μ je nezáporná a $\mu(\emptyset) = 0$
3) μ je σ-aditivní $\equiv \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Rightarrow$
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

(X, Σ, μ) se nazývá prostor s mírou

Je-li navíc $\mu(X) = 1$, pak (X, Σ, μ) se nazývá pravděpodobnostní prostor

- Pokud μ je míra a $\mu(X) < \infty$, pak μ je konečná
- Míra je σ-konečná $\equiv \exists X_n \nearrow X$ (tzn. $X_{n+1} \supset X_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$) a $\mu(X_n) < +\infty$
- Míra μ je úplná $\equiv (A \subset B) \wedge (B \in \Sigma)$ a $\mu(B) = 0 \Rightarrow A \in \Sigma$ (ze σ-aditivity pak plyne, že $\mu(A) = 0$)
- Míra μ je absolutně spojitá vzhledem k míře ν, píšeme $\mu \ll \nu$ $\equiv$ Je-li $\nu(A) = 0$, pak $\mu(A) = 0$.

$\boxed{\text{Věta 3.12}}$
- Systém všech měřitelných množin $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je σ-algebra
- Pro libovolné $f \in M^+(\mathbb{R}^d)$, je ν_f úplná míra, která je absolutně spojitá k Lebesgueově míře λ_d.

Dk
- $\mathbb{R}^d \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow 1 \in M^+$, avšak $h_n = \chi_{[-n,n]^d} \nearrow 1$

$\sup h_n = 1 \in M^+$

- $A, B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ tj. $\chi_A, \chi_B \in M(\mathbb{R}^d)$, pak

$\left.\begin{array}{l} \chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} \in M(\mathbb{R}^d) \\ \chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} \in M(\mathbb{R}^d) \end{array}\right\}$ dle věty 3.11

a protože $\chi_{A \setminus B} = \chi_{A \setminus (B\cap A)} = \chi_A - \chi_{B\cap A} \in M(\mathbb{R}^d)$

- Jsou-li $A_i \in \Sigma$, pak $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$ neboť

$\sup_{i=1,\dots,\infty} \{\chi_{A_i}\} \in M(\mathbb{R}^d)$

- $\nu_f \geq 0$ neboť $f\chi_\Omega \geq 0$ pro $f \geq 0$.

• Jsou-li E_i navzájem disjunktní, měřitelné, pak

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu_f(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int f\chi_{E_i} = \int f \sum \chi_{E_i} = \int f \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} = \nu_f\Big(\bigcup_{1}^{\infty} E_i\Big)$$

kde jsme využili $0 \le f\chi_{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} \nearrow f\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$.

• ν_f je úplná. Vskutku, je-li $A \subset B$ a $B \in \Sigma$ a $\mu(B) = 0$,
pak $\int f\chi_B = 0 \Rightarrow f\chi_B = 0$ s.v. a také $f\chi_A = 0$ s.v.
a $\int f\chi_A = 0 \Rightarrow \nu_f(A) = 0$

• $\nu_f \ll \lambda_d$ neboť $\lambda_d(E) = 0 \Leftrightarrow \int \chi_E = 0 \underset{\chi_E \ge 0}{\Rightarrow} \chi_E = 0$ s.v. $\Rightarrow f\chi_E = 0$ s.v. $\Rightarrow \nu_f(E) = \int f\chi_E = 0$

∎

Z předchozí věty plyne:

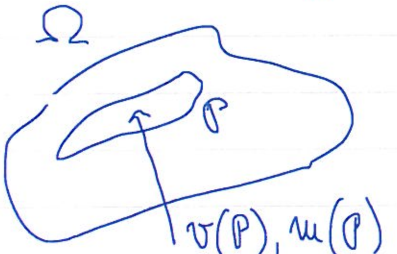
$$\nu_f(\Omega) = \int f\chi_\Omega \Rightarrow \nu_f \ll \lambda_d$$

Platí i opačné tvrzení, které se nazývá Radon-Nikodymova věta

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ "spojité prostředí" (voda, vzduch, pevná látka). V takovém prostředí je přirozené požadovat, že "je-li objem nějaké podmnožiny nulový, je i hmotnost spojená s touto podmnožinou nulová", neboli $\underset{\text{hmotnost}}{m(P)} = 0$ pokud $\underset{\text{objem}}{V(P)} = 0$ neboli $m \ll P$. Dle Radon-Nikodymovy věty $\exists\, \rho \ge 0 : m(P) = \int_P \rho \, dV$

$\rho : \Omega \to \mathbb{R}$

(ρ se nazývá hustota)



V, m dvě míry

$\boxed{\text{POZOROVÁNÍ}}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ spojitá, pak $F(x) := \int_a^x f(s)\,ds$ splňuje $F' = f$ v $\mathbb{R}$

Je-li navíc $f \ge 0$, pak $\nu_f(a,b) = \int_a^b f(s)\,ds$ je nejen míra, ale platí $\nu_f(a,b) = F(b) - F(a)$

Tento poslední vztah lze zobecnit následujícím způsobem

Buď F rostoucí. Pak f může mít nejvýše spočetně bodů nespojitosti. Je-li x_0 bod nespojitosti, pak $F(x_0-) := \lim_{x \to x_0-} F(x)$, $F(x_0+) := \lim F(x)$ a $F(x_0)$ může být jakákoliv hodnota mezi $F(x_0-)$ a $F(x_0+)$. Definujeme-li $F(x_0) = F(x_0+)$, pak F je nejen neklesající, ale také spojitá zprava. Platí:

Tvrzení: Je-li F rostoucí fce na $\mathbb{R}$ spojitá zprava. Pak existuje jediná míra μ (často značená dF) definovaná na σ-algebře borelovských množin tak, že $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ je-li $a < b$. Naopak, je-li μ míra na σ-algebře borelovských množin, která je konečná na omezených intervalech, pak F definované:

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu((-x,0]) & x < 0 \end{cases}$$ je rostoucí a spojitá zprava.

Je-li F rostoucí, spojitá zprava na $[a,b]$, pak lze rozšířit vně $[a,b]$ tak, že $F(x) = F(a)$ pro $x < a$ a $F(x) = F(b)$ pro $x > b$. Zřejmě $\mu(-\infty, a) = 0$ a $\mu(b, +\infty) = 0$.

Píšeme: $$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x) = \int_a^b f(x)\,dF$$ Lebesgue-Stieltjesův integrál

se redukuje na Lebesgueův $\int$ pro $F(x) = x$, což vede k značení $dF = dx$.

Poznámky ① V $d=1$ známe $(R)\int_a^b f$, který je dobře definován pro $f \in C(\langle a,b \rangle)$.
V jedné dimenzi lze tedy budovat konstrukci Lebesgueova integrálu z $H := \{f \in C(\langle a,b \rangle)\}$.

② Jiný způsob konstrukce $(\mathcal{L})\int_a^b f$.

- (X, Σ, μ) prostor s mírou
- f je měřitelná $\iff (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \{x; f(x) > \alpha\}$ je měřitelná
- H ..... jednoduché fce na měřitelné Ω.

ÚMLUVA Buď $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\in\Lambda(\mathbb{R}^d)$. Definujeme

$\tilde f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ předpisem $\tilde f(x)=\begin{cases} f(x) & x\in\Omega \\ 0 & x\in \mathbb{R}^d\setminus\Omega\end{cases}$

Je-li $\tilde f\in M$, pak definujeme

$$\boxed{(\mathcal{L})\int_\Omega f=(\mathcal{L})\int \tilde f}$$ neboli $f\in L(\Omega)\overset{df}{\equiv}\tilde f\in L$

Věta 3.13 (závislost $(\mathcal{L})\int$ na integračním oboru). Pro $\Omega,\Omega_i\in\Lambda(\mathbb{R}^d)$, $i\in\mathbb{N}$, platí:

(1) $\Omega=\bigcup_{i=1}^\infty\Omega_i$ a $\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ a $f\in L(\Omega)$ $\Rightarrow$ $\int_\Omega f=\sum_{i=1}^\infty\int_{\Omega_i}f$

(1') $\Omega=\bigcup_{i=1}^\infty\Omega_i$ a $\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ a $0\le f\in M$, $\sum_{i=1}^\infty\int_{\Omega_i}f<+\infty$ $\Rightarrow f\in L(\Omega)$

(2) $\Omega=\bigcup_{i=1}^\infty\Omega_i$ a $\Omega_i\subset\Omega_{i+1}$ pro $\forall i$ a $f\in L(\Omega)\Rightarrow \int_\Omega f=\lim_{i\to\infty}\int_{\Omega_i}f$

(3) $\Omega=\bigcap_{i=1}^\infty\Omega_i$ a $\Omega_{i+1}\subset\Omega_i$ pro $\forall i$ a $f\in L(\Omega)\Rightarrow \int_\Omega f=\lim_{i\to\infty}\int_{\Omega_i}f$

(4) $\lambda_d(\Omega)<\infty$ a $f\in M(\Omega)$ a $(\exists K)(|f|\le K$ na $\Omega)$

$\Rightarrow f\in L(\Omega)$ a $\left|\int_\Omega f\right|\le K\lambda_d(\Omega)<\infty$

(5) f měřitelná, E množ. míry nula $\Rightarrow$ $\int_E f=0$

(6) $\tilde\Omega\subset\Omega$, $\tilde\Omega,\Omega\in\Lambda(\mathbb{R}^d)$ a $\underset{f\ge 0}{f\in L(\Omega)}\Rightarrow\int_{\tilde\Omega}f\le\int_\Omega f$

Dk **Ad (1)** Je-li $f\in L(\Omega)$, pak $|f|\in L(\Omega)$. Dle Lebesgueovy věty ($|f|$ je integr. majo.) $f\in L(\Omega_i)$.

Navíc $\sum_{i=1}^k\chi_{\Omega_i}f\xrightarrow[k\to\infty]{}\chi_\Omega f$ v $\mathbb{R}^d\Rightarrow$

$$\int_\Omega f=\int f\chi_\Omega\underset{\text{Lebesg.}}{=}\lim_{k\to\infty}\int\sum_{i=1}^k f\chi_{\Omega_i}=\lim_{k\to\infty}\sum_1^k\int f\chi_{\Omega_i}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_1^k\int_{\Omega_i}f=\sum_{i=1}^\infty\int_{\Omega_i}f$$

∎

Ad (1') $\sum_{i=1}^{k} f\chi_{\Omega_i} \nearrow f\chi_{\Omega}$ neboť $f \geq 0$. S využitím zbylých předpokladů a Leviho věty dostáváme $f\chi_{\Omega} \in L \Rightarrow f \in L(\Omega)$. ⊠

Ad (2) Definujme $\tilde{\Omega}_i$ pomocí Ω_i tak, aby vznikl navzájem disjunktní systém:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\Omega}_1 := \Omega_1 \\ \tilde{\Omega}_i := \Omega_{i+1} \setminus \Omega_i \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{\Omega}_i \text{ navzájem disjunktní a } \bigcup \tilde{\Omega}_i = \Omega$$

Dle (1):

$$\int_{\Omega} f = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_{\tilde{\Omega}_i} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2\setminus\Omega_1} f + \dots + \int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int f\chi_{\Omega_1} + f\chi_{\Omega_2\setminus\Omega_1} + \dots + f\chi_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int f\chi_{\Omega_k} = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f$$

Ad (3)

$$\Omega_1\setminus\Omega_i \nearrow \Omega_1\setminus\Omega \overset{\text{Dle (2)}}{\Longrightarrow} \int_{\Omega_1\setminus\Omega} f = \lim_{i\to\infty} \int_{\Omega_1\setminus\Omega_i} f \Rightarrow$$

$$\int f\chi_{\Omega_1\setminus\Omega} = \lim_{i\to\infty} \int f\chi_{\Omega_1\setminus\Omega_i} \Rightarrow \int f\chi_{\Omega_1} - f\chi_{\Omega} = \lim_{i\to\infty} \int f\chi_{\Omega_1} - \int f\chi_{\Omega_i}$$

$$\Rightarrow \int f\chi_{\Omega} = \lim_{i\to\infty} \int f\chi_{\Omega_i} \quad ⊠$$

Ad (4) Snadné – jednoduché, ale často vhodné k použití.

Ad (5) Nejdříve dodefinujme f mimo E nulou. Tedy $\tilde{f} = 0$ s.v. (přičemž jsme využili charakterizaci množin míry nula dle charakteristických funkcí). Pak dle Věty 3.2: $\int \tilde{f} = 0$ a to znamená $\int_E f = 0$.

Ad (6) Platí pro $f \geq 0$: $\int_{\tilde{\Omega}} f \leq \int_{\tilde{\Omega}} f + \underbrace{\int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} f}_{\geq 0} = \int_{\Omega} f$ ⊠

3.5 Jak se Lebesgueův integrál počítá

Nejdříve se zaměříme na situaci pro funkce jedné proměnné, $d=1$. Poté uvedeme dvě významné tvrzení pro funkce více proměnných: Fubiniho větu a větu o substituci.

Věta 3.14 (existence $(R)\int_a^b f(x)dx$ implikuje existenci $(\mathcal{L})\int_a^b f$)

- $a,b \in \mathbb{R}$, $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ omezená
- Existuje $(R)\int_a^b f(x)\,dx$

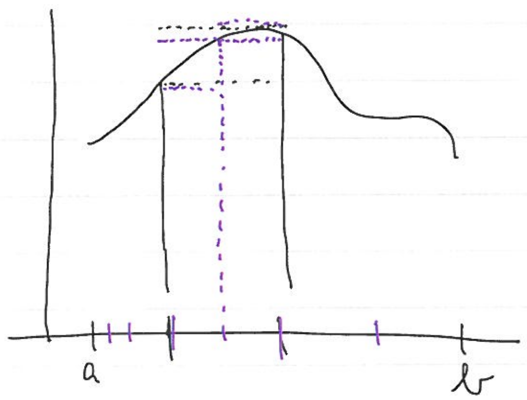
$\Rightarrow$

- $f \in L(\langle a,b\rangle)$
- $(\mathcal{L})\int_a^b f = (R)\int_a^b f(x)\,dx$.

Dk Buď $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost dělení $\langle a,b\rangle$; $D_{n+1} \subset D_n$ a $|D_n| \searrow 0$ $\quad (|D_{n+1}| \le |D_n|)$.

Definujme $h_n, H_n \in H$: $\quad h_n = \sum m_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}$, $m_i := \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \in \mathbb{R}$

$H_n = \sum M_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}$, $M_i := \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \in \mathbb{R}$



Pak $h_n \le h_{n+1} \le \dots H_1$

a

$H_n \ge H_{n+1} \ge \dots h_1$

a existují funkce F_1 a F_2 tak, že

$$h_n \nearrow F_1 \quad \text{a} \quad H_n \searrow F_2$$

Dle Leviho věty

- $F_1, F_2 \in L$
- $(\mathcal{L})\int F_1 = \lim (\mathcal{L})\int h_n = \lim (R)\int h_n = (R)\underline{\int_a^b} f(x)dx$
- $(\mathcal{L})\int F_2 = \lim (\mathcal{L})\int H_n = \lim (R)\int H_n = (R)\overline{\int_a^b} f(x)dx$

Protože $(R)\int_a^b f$ existuje, tak se horní a dolní Riemannovy součty $(R)\overline{\int_a^b} f$ a $(R)\underline{\int_a^b} f$ rovnají. Tedy

$$(\mathcal{L})\int_a^b F_1 = (\mathcal{L})\int_a^b F_2$$

Protože $h_n \leq f \leq H_n$, tak $(n\to\infty)$ $F_1 \leq f \leq F_2$ s.v.

Protože $F_2 - F_1 \geq 0$ s.v. & $(\mathcal{L})\int F_2 - F_1 \geq 0$, tak $F_1 = F_2$ s.v.

Což implikuje $F_1 = F_2 = f$ s.v. Tvrzení je dokázáno. ▨

Existuje mnoho integrálů, doposud jsme se seznámili s Riemannovým a Lebesgueovým. Lze také zavést Newtonův integrál a to následujícím způsobem: buď $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a nechť $F: (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a splňuje $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in (a,b) \setminus K$, kde K je konečná (F je zobecněná primitivní funkce). Nechť navíc

$$F(b-) - F(a+)$$

má smysl, pak

$$(N)\int_a^b f = F(b-) - F(a+)$$

Ze základní věty diferenciálního a integrálního počtu lze nahlédnout, že pokud existují na (a,b) omezeným (R) a (N) integrál, pak se rovnají.

Poznamenejme, že Newtonův integrál je příklad neabsolutně konvergentního integrálu: existují funkce na $(0,\infty)$ takové, že $(N)\int_0^\infty f < \infty$ a $(N)\int_0^\infty |f| = +\infty$ $\square$

<u>Příklad</u> Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\frac{1}{x^\alpha} \in L((0,b))$, $b \in \mathbb{R}$?

<u>Řešení</u> $\frac{1}{x^\alpha} \in C((0,b)) \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \in M((0,b))$ $\forall \alpha$ a $\frac{1}{x^\alpha} \geq 0$.

Uvažme $\Omega_n = \langle \frac{1}{n}, b \rangle$

$$(L)\int_{1/n}^{b} \frac{1}{x^\alpha} = (R)\int_{1/n}^{b} \frac{1}{x^\alpha} = (N)\int_{1/n}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} \overset{\alpha \neq 1}{=} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{1/n}^{b}$$

$$= \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \begin{cases} \nearrow \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{pro } \alpha < 1 \\ \searrow +\infty & \text{pro } \alpha > 1 \end{cases}$$

Protože $(N)\int_{1/n}^{b} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{1/n}^{b} \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty)$,

dostáváme:

$$\boxed{\frac{1}{x^\alpha} \in L((0,b)) \iff \alpha < 1}$$

Proveďte podobnou analýzu pro $\frac{1}{x^\alpha}$ na $(1,\infty)$:
pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\frac{1}{x^\alpha} \in L((1,\infty))$?

Věta 3.18

① • $f \in C(\langle a, +\infty))$, $f \geq 0$ (nebo ≤ 0)
• existuje $\lim_{x \to \infty} |f(x)|\, x^{\alpha} = A$

$\Rightarrow$
• $A \in (0, \infty)$: $f \in L(\langle a, +\infty)) \Leftrightarrow \alpha > 1$
• $A = 0 \wedge \alpha > 1 \Rightarrow f \in L(\langle a, \infty))$
• $A = +\infty \wedge \alpha \leq 1 \Rightarrow$
$f \in L^*(\langle a, \infty)) \setminus L(\langle a, \infty))$

② • $f \in C(\langle a, b))$, $f \geq 0$ (nebo ≤ 0)
• existuje $\lim_{x \to a+} f(x)(x-a)^{\alpha} = A$

$\Rightarrow$
• $A \in (0, \infty)$: $f \in L(\langle a, b)) \Leftrightarrow \alpha < 1$
• $A = 0$ & $\alpha < 1 \Rightarrow f \in L(\langle a, b))$
• $A = \infty$ & $\alpha \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f \in L^*(\langle a, b)) \setminus L(\langle a, b))$

Dk Ad ① $A \in (0, \infty) \Rightarrow |f(x)| \leq \dfrac{2A}{x^{\alpha}}$ na okolí $+\infty$.

tato majoranta je integrovatelná $\Leftrightarrow \alpha > 1$;

$A = 0 \Rightarrow |f(x)| \leq \dfrac{C}{x^{\alpha}}$ (s $C > 0$ na jistém okolí ∞) a tvrzení plyne; neboť pro $\alpha > 1$ je $\dfrac{C}{x^{\alpha}} \in L$

$A = +\infty$
$\Downarrow$
$\exists L > 0 \quad |f(x)| \geq \dfrac{L}{x^{\alpha}}$ na jistém okolí ∞.

a tvrzení plyne ze skutečnosti, že

$$\int \frac{L}{x^{\alpha}} = +\infty.$$

Ad ② SAMI.

$\blacksquare$

Věta 3.16 (Fubini) Buď $f \in L^*(\mathbb{R}^{q+s})$. Definujme

pro $x \in \mathbb{R}^q$: $\quad F(x) = (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dy \quad \left(= (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^s} f(x,\cdot) \right)$

pro $y \in \mathbb{R}^s$: $\quad G(y) = (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dx \left(= (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^q} f(\cdot,y)\,dy \right)$

Pak
$$F \in L^*(\mathbb{R}^q) \quad a \quad G \in L^*(\mathbb{R}^s)$$
a platí:

- $(\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^{q+s}} f = \int_{\mathbb{R}^q} F = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dy \right) dx \qquad (*)$
- $(\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^{q+s}} f = \int_{\mathbb{R}^s} G = \int_{\mathbb{R}^s} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dx \right) dy \qquad (**)$

Důsledek ① Buď $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^{q+s})$ tj. Ω je měřitelná a buď $f \in L^*(\Omega)$. Označ

$P_1 = \{ x \in \mathbb{R}^q ;\ \exists\, y \in \mathbb{R}^s \text{ a } (x,y) \in \Omega \}$ ... průmět Ω do $\mathbb{R}^q$

$P_2 = \{ y \in \mathbb{R}^s ;\ \exists\, x \in \mathbb{R}^q \text{ a } (x,y) \in \Omega \}$ – průmět Ω do $\mathbb{R}^s$

Dále značme:
- pro $x \in P_1$: $M(x,*) := \{ y \in \mathbb{R}^s ;\ (x,y) \in \Omega \}$
- pro $y \in P_2$: $M(*,y) := \{ x \in \mathbb{R}^q ;\ (x,y) \in \Omega \}$.

Jsou-li $P_1 \in \Lambda(\mathbb{R}^q)$ a $P_2 \in \Lambda(\mathbb{R}^s)$, pak

(1) pro s.v. $x \in P_1$ existují $F(x) := \int_{M(x,*)} f(x,\cdot)$

pro s.v. $y \in P_2$ — " — $G(y) := \int_{M(*,y)} f(\cdot,y)$

② Existují $\int_{P_1} F(x)\,dx$ a $\int_{P_2} G(y)\,dy$

③ Platí: $\int_\Omega f = \int_{P_1} F(x)\,dx = \int_{P_1} \left(\int_{M(x,*)} f(x,y)\,dy \right) dx$

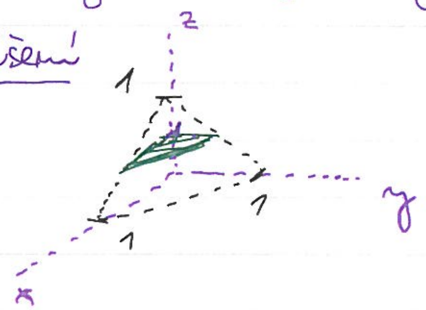
$$= \int_{P_2} G(y)\,dy = \int_{P_2} \left(\int_{M(*,y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Dk důsledku: Definuji $\tilde{f} = f\chi_\Omega$ a užiji větu 3.16.

Příklad: Naznačte obecný postup výpočtu $I = (\mathcal{L})\int_M f(x,y,z)$, kde M je omezená množina vymezená plochami
otevřená

$x=0$, $y=0$, $z=0$ a $x+y+z=1$ a poté spočtěte objem M (Lebesgueovu míru M).

Řešení



- $M \subset \mathbb{R}^3$
- $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z \in (0,1),\ y \in (0,1-z),\ x \in (0,1-y-z)\}$

Tedy obecně:

$$\int_M f(x,y,z) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-y-z} f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz$$

Speciálně

$$V(M) = \lambda_3(M) = \int_M 1 = \iiint_M dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-y-z} dx \right) dy \right) dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-y-z)\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \left[(1-z)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-z} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^2\,dz = \frac{1}{2} \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

$\boxed{\text{Dk Fubiniho věty}}$ Stačí ukázat pro $f \geq 0$ a pro $F(x) = (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dy$

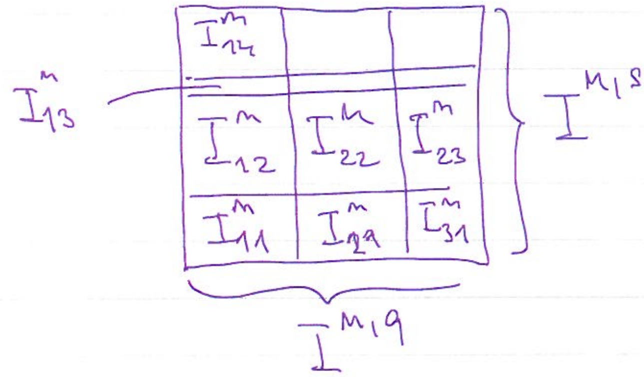
cíl: $\cdot\ F \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^q)$

(*) $\cdot\ \int_{\mathbb{R}^{q+s}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dy \right) dx$

Protože $f \in \mathcal{M}^f$, resp. $f \in \mathcal{L}^*$
existují $h_n \in H$, $h_n \nearrow f$.
Ukážeme, že [1] (*) platí pro $h_n \in H$
[2] provedeme limitní přechod $n \to \infty$.

$\boxed{\text{Ad [1]}}$ h_n jsou definovány na $\underset{\in \mathbb{R}^{q+s}}{I^m} = I^{m,q} \times I^{m,s}$

Označme I^m_{ij} ... podinterval I^m, na kterém je h^m rovno c^m_{ij}
a platí $I^m_{ij} = I_i^{m,q} \times I_j^{m,s}$, viz obrázek pro
$q = s = 1$



Zřejmě

$$V(I^m) = V(I^{m,q})\,V(I^{m,s})$$
$$V(I^m_{ij}) = V(I_i^{m,q})\,V(I_j^{m,s})$$

Pro $x \in I^{m,q}$ existuje $i : x \in I_i^{m,q}$ a definujeme

$$F_i^m(x) = \int_{\mathbb{R}^s} h_m(x,y)\,dy = \sum c^m_{ij}\, V(I_j^{m,s})$$

což je konstantní *) na $I_i^{m,q}$

Dále

$$\int_{\mathbb{R}^{q+s}} h_m = \int_{I^m} h_m = \sum_{i,j} c^m_{ij} V(I^m_{ij}) = \sum_{i,j} c^m_{ij} V(I_i^{m,q}) V(I_j^{m,s})$$
$$= \sum_i V(I_i^{m,q}) \sum_j c^m_{ij} V(I_j^{m,s}) = \sum V(I_i^{m,q})\, F_i^m$$
$$= \int_{\mathbb{R}^q} F^m$$

kde $F^m = \sum F_i \chi_{I_i^{m,q}}$ je definována na $I^{m,q}$
je schodovitá

*) Tedy $F_i^m(x) = F_i^m$

Ad [2] $\lim\limits_{n\to\infty}$

$$\int_{\mathbb{R}^{q+s}} f = \int_{\mathbb{R}^{q+s}} \lim h_n \overset{\text{Levi}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{q+s}} h_n$$

$$\overset{[1]}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^s} h_n(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} F^n$$

$$\overset{\text{Levi}}{=} \int_{\mathbb{R}^q} \lim F^n = \int_{\mathbb{R}^q} F$$

$F^n \nearrow F$ (neboť $h_n \nearrow f$ a použijeme definici F^n, F). ▨

<u>Důsledek Fubiniho věty</u> (význačný z početního hlediska)

Je-li $f \in M(\Omega)$ a jsou-li $P_1, P_2, M(x,*)$ a $M(*,y)$ jako ve Fubiniho větě 3.16 a je-li alespoň jeden z integrálů

$$I := \int_{P_1} \left(\int_{M(x,*)} |f(x,y)|\,dy \right) dx \;, \qquad J := \int_{P_2} \left(\int_{M(*,y)} |f(x,y)|\,dx \right) dy$$

konečný, pak

$f \in L(\Omega)$ a tvrzení (*) a (**) platí.

Dk tohoto důsledku: Je-li $f \in M(\Omega)$, pak $|f| \in M(\Omega)$. Protože $|f| \geq 0$, tak $|f| \in L^*(\Omega)$ a pro $|f|$ dle Fubiniho věty (*) a (**) platí pro $|f|$. Protože I nebo J je konečný, tak (*) či (**) pro $|f|$ implikují $\int_\Omega |f| < +\infty$. Tedy $f \in L(\Omega)$ a nyní aplikuji Fubiniho větu na f a dostávám vzorce (*) i (**). ⧄

Věta 3.17 (o substituci) Buď

- $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $\Psi: G \to \mathbb{R}^d$ prosté, regulární (tzn. Ψ je C^1 zobrazení na G, $\det \nabla\Psi \neq 0$ v G)

- $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ taková, že $\Omega \subset \Psi(G)$
- f definovaná s.v. na Ω

Pak
$$\int_\Omega f(y)\,dy = \int_{\Psi^{-1}(\Omega)} f(\Psi(x))\,|\det \nabla\Psi(x)|\,dx \qquad (\bullet)$$
pokud aspoň jeden z integrálů existuje.

Místo důkazu uvedeme několik pozorování k pochopení přítomnosti členu $|\det \nabla\Psi(x)|$ ve vztahu $(\bullet)$.

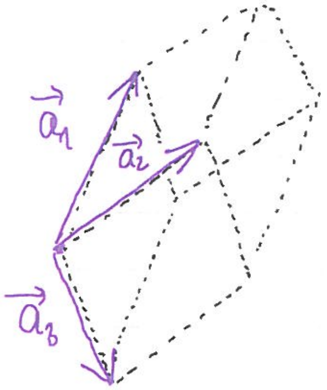
Pozorování ① Je-li $d=1$, pak $\det \nabla\Psi(x) = \Psi'(x)$. Pro $d=1$, má Věta 3.17 tvar:

Je-li $\Psi: (\alpha,\beta) \xrightarrow{\text{na}} (\Psi(\alpha),\Psi(\beta))$ regulární (tj. $\Psi \in C^1((\alpha,\beta))$ a $\Psi'>0$ nebo $\Psi'<0$ v (α,β))

a je-li $\boxed{\Psi'>0}$, pak Ψ je rostoucí a $\Psi(\alpha)<\Psi(\beta)$ a platí $(\bullet)$:
$$\int_{\Psi(\alpha)}^{\Psi(\beta)} f(y)\,dy = \int_\alpha^\beta f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx,$$
což je stejný tvar jako ve větě o substituci pro Riemannův integrál.

Je-li $\boxed{\Psi'<0}$, pak Ψ je klesající a $\Psi(\beta)<\Psi(\alpha)$ a z $(\bullet)$
$$\int_{\Psi(\beta)}^{\Psi(\alpha)} f(y)\,dy = \int_\alpha^\beta f(\Psi(x))\,|\Psi'(x)|\,dx = -\int_\alpha^\beta f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx. \text{ Tedy}$$
$$\int_\alpha^\beta f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx = \int_{\Psi(\alpha)}^{\Psi(\beta)} f(y)\,dy,$$
což je opět věta o substituci známá z teorie Riemannova integrálu.

② Geometrický význam determinantu



Buď $\mathbb{A}$ matice : i-tý sloupec = vektor $\vec{a}_i$

Buď $R_{\mathbb{A}}$ rovnoběžnostěn jako na obrázku.

Platí: $\boxed{\lambda_d(R_{\mathbb{A}}) = |\det \mathbb{A}|}$

$\uparrow$ d-rozměrná Lebesgueova míra $R_{\mathbb{A}}$ $\shortparallel$ objem rovnoběžnostěnu $R_{\mathbb{A}}$

Dk

$$R_{\mathbb{A}} := \{ y \in \mathbb{R}^d ; \ y = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{a}_i, \ x_i \in (0,1), \ i = 1, \dots, d \}$$

- $\psi(x) \overset{df.}{=} \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{a}_i \ : (0,1) \xrightarrow{na} R_{\mathbb{A}}$ prostě
- $\det \nabla \psi(x) = \det \mathbb{A}$

$$\Rightarrow |R_{\mathbb{A}}| := \lambda_d(R_{\mathbb{A}}) = \int_{R_{\mathbb{A}}} 1 \, d\lambda_d \overset{V\,3.17}{=} \int_{\langle 0,1 \rangle^d} |\det \mathbb{A}| \, d\lambda_d(x)$$

$$= \det \mathbb{A} \, \underbrace{\lambda_d(\langle 0,1 \rangle^d)}_{= 1}$$

$$= \det \mathbb{A} \qquad \blacksquare$$

Obecněji: pro $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^d$: $K_\delta = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d ; \ 0 < x_i - x_i^0 < \delta \}$

Pak pro $y^0 \in \mathbb{R}$

$$\psi(x) = \vec{y}^0 + \sum_{i=1}^{d} (x_i - x_i^0) \vec{a}_i = \vec{y}_0 + \mathbb{A}(\vec{x} - \vec{x}^0)$$

zobrazuje K_δ na rovnoběžnostěn o stranách daných vektory $\delta \vec{a}_i$.

Tedy
$$|\psi(K_\delta)| = |\det \mathbb{A}| \, |K_\delta|$$

ZMĚNA OBJEMU PŘI LINEÁRNÍ TRANSFORMACI.

Ještě obecněji uvažujme $\vec{\Psi}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ regulární.

Pak dle Taylorova rozvoje:

$$\vec{\Psi}(x) = \vec{\Psi}(x^0) + \underbrace{\overrightarrow{\nabla \Psi}(x^0)\,(\vec{x}-\vec{x}^0)}_{= d\Psi(\vec{x}^0; \vec{x}-\vec{x}^0)} + o(|x-x^0|)$$

lineární aproximace Ψ v bodě x^0

Pak pro $|\vec{x}-\vec{x}^0|$ malá platí:

$$|\Psi(K_\delta)| \approx |\det \nabla\vec{\Psi}(\vec{x}^0)|\; |K_\delta|$$

koeficient změny objemu krychle na její obraz zobrazením $\vec{\Psi}$

přibližně rovnoběžnostěm.

Poznamenejme, že zobrazení

$$\vec{\Psi}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{y}^0}_{\text{posunutí}} + \underbrace{\mathbb{A}(\vec{x}-\vec{x}^0)}_{\text{otočení}}, \quad \text{kde } \mathbb{A}\mathbb{A}^T = 1$$

ortogonální matice

$\Downarrow$

$|\det \mathbb{A}| = 1$

zachovává délky*), objem, ...

Příklady ① Polární, cylindrické, sférické
d-rozměrné sférické souřadnice

viz cvičení

---

*) Platí

$$|\Psi(x^1)-\Psi(x^2)|^2 = (\Psi(x^1)-\Psi(x^2))\cdot(\Psi(x^1)-\Psi(x^2)) = (\mathbb{A}(x^1-x^2))\cdot(\mathbb{A}(x^1-x^2))$$
$$= \mathbb{A}\mathbb{A}^T(x^1-x^2)\cdot(x^1-x^2) = |x^1-x^2|^2$$

② Spočtěte $I_d := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec{x}|^2}\, d\vec{x}$.

Platí $I_d = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \cdots e^{-x_d^2} \overset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} \cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_d^2}\right)\right)\cdots\right)$

$= J^d$ kde $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz$

Nyní počítejme I_2 pomocí Věty o substituci s použitím polárních souřadnic:

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr\right) d\varphi$$

$\Psi := \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} : \underset{r}{(0,\infty)} \times (0,2\pi) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

prostě

množ. míry nula

$\det D\Psi = r$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^\infty = \pi$$

Tedy $J^2 = I_2 = \pi$ implikuje $J = \sqrt{\pi}$ a tedy

$$\boxed{I_d = (\pi)^{\frac{d}{2}}}$$

∎

③ Pro $\alpha > \beta > 0$ spočtěte: $I(\alpha,\beta) := \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}$

Označme $f(x,y) := \frac{e^{-yx^2}}{x}$ ... par.

$$f(x,\beta) - f(x,\alpha) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dy \overset{!}{=} \int_\alpha^\beta -x e^{-yx^2}\, dy$$

Tedy $I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta x e^{-yx^2}\, dy\right) dx$

integr. fce je $\geq$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_\alpha^\beta \left(\int_0^\infty x e^{-yx^2}\, dx\right) dy$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{e^{-yx^2}}{2y}\right]_0^\infty dy = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{1}{y}\, dy = \ln\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

∎

3.6 Integrály závislé na parametru

Předchozí příklad byl příkladem integrálu závislého na parametrech α, β. V této kapitole se budeme zabývat otázkou, zda integrál $I(\alpha) = \int_\Omega f(\alpha, x)\, dx$ derivovat dle α tak, že prohodíme $\int$ a derivování, tj. zda platí

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, x)\, dx .$$

Podobná otázka: platí

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} I(\alpha) = \int_\Omega \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha, x)\, dx \quad ?$$

Odpovědi přinášejí následující věty.

Věta 3.18 (o záměně $\lim_{\alpha\to\alpha_0}$ a $\int$)

Buď $\alpha_0 \in P \subset \mathbb{R}^p$, $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$. Buď $F: P \times \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že

(1) $(\forall \alpha \in P)$ $F(\alpha, \cdot)$ je měřitelná

(2) Pro s.v. $x \in \Omega$ existuje $\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha, x) =: F(x)$

(3) $\exists g \in L(\Omega)$: pro s.v. $x \in \Omega$ a $\forall \alpha \in P$: $|f(\alpha, x)| \leq g(x)$

Potom
- $F \in L(\Omega)$
- $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_\Omega F(\alpha, x)\, dx = \int_\Omega \lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha, x) = \int_\Omega F(x) dx$

Dk plyne z Heineho a Lebesgueovy věty.

Heine: $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_\Omega F(\alpha, x) = A \iff \forall \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \alpha_n \to \alpha_0 \Rightarrow \int_\Omega F(\alpha_n, x)\, dx \to \int_\Omega F(\alpha_0, x)$

Lebesgueovu větu aplikujeme přímo na $f_n(x) := F(\alpha_n, x)$.

$\blacksquare$

<u>Důsledky Věty 3.18</u> (i) Nahradíme-li (2) předpokladem

(2') $F(\alpha, x)$ je pro s.v. $x \in \Omega$ spojitá v α_0

resp.

(2'') $F(\cdot, x) \in C(P)$ pro s.v. $x \in \Omega$,

potom $\varphi : \underset{\in P}{\alpha} \longrightarrow \varphi(\alpha) := \int_\Omega F(\alpha, x)\,dx$ je spojitá v α_0

resp. $\varphi \in C(P)$.

(ii) $\lim_{\alpha \to \alpha_0}$, spojitost, derivace jsou <u>lokální</u> vlastnosti; k záměně tedy stačí nalézt majorantu jen na určitém okolí α_0 (a ne nutně na celém P)

(iii) Předpoklad (3) lze nahradit předpokladem

(3') pro s.v. $x \in \Omega$ a $\forall \alpha, \beta \in P : \alpha \leq \beta \Rightarrow F(\alpha, \cdot) \leq F(\beta, \cdot)$
a $(\exists K \in \mathbb{R})$ $\int F(\alpha, x)\,dx \leq K$ $\forall \alpha \in \mathcal{U}(\alpha_0)$

což je zřejmé pokud v důkazu nahradíme Lebesgueovu větu Leviho větou.

<u>Věta 3.19</u> (O záměně derivace a $\int$) Buď $I \subset \mathbb{R}$ interval
a $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ takové, že ($\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$)

(1) $(\forall \alpha \in I)$ $F(\alpha, \cdot)$ je měřitelná

$\exists N \subset \Omega$, $\lambda_d(N) = 0$ tak, že

(2) $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ je konečná v $\Omega \setminus N$

(3) $\exists g \in L(\Omega)$, $(\forall \alpha \in I)$ $\left|\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right| \leq g$ v $\Omega \setminus N$

(4) $\exists \alpha_0 \in I$: $F(\alpha_0, \cdot) \in L(\Omega)$

Pak
- $(\forall \alpha \in I)$ $F(\alpha, \cdot) \in L(\Omega)$
- $\frac{dI}{d\alpha} = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, x)\,dx$

(Dk) Pro $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$ a pro $x \in \Omega \setminus N$ je dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě

$$\left| \frac{F(\alpha, x) - F(\beta, x)}{\alpha - \beta} \right| = \left| \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\xi, x) \right| \leq g(x)$$

Protože $g \in L(\Omega)$, tak $x \longmapsto \frac{F(\alpha, x) - F(\beta, x)}{\alpha - \beta} \in L(\Omega)$

Volbou $\beta = \alpha_0$ dostáváme

$$F(\alpha, \cdot) \in L(\Omega) \qquad \forall \alpha \in I$$

Navíc

$$I'(\alpha) = \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{I(\alpha) - I(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

$$= \lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_\Omega \frac{F(\alpha, x) - F(\alpha_0, x)}{\alpha - \alpha_0}\, dx$$

$$\overset{\text{věta 3.18}}{=} \int_\Omega \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{F(\alpha, x) - F(\alpha_0, x)}{\alpha - \alpha_0}\, dx$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, dx.$$

Pozorování: Opět lze změnit předpoklady tak, abychom v důkazu využili Leviho větu místo Lebesgueovy věty.

Příklady ① Spočtěte $I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh(bx)\, dx = 2\int_0^\infty f(a,b,x)\, dx$ pro $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Řešení: Označ $f(a, b, \cdot) := e^{-ax^2} \cosh(bx)$

- Pro $\forall a > 0$, $b \in \mathbb{R}$: $f(a, b, \cdot) \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow f(a, b, \cdot) \in M(\mathbb{R})$
- $|f(a, b, \cdot)| \leq e^{-\frac{a}{2}x^2}$ pro dostatečně velká x
  a $\int_0^\infty e^{-\frac{a}{2}x^2} < +\infty$ (viz příklad dříve)

neboli $\forall a_0 > 0$ $\exists\, U_{\frac{a_0}{2}}(a_0)$ tak, že $\forall a \in U_{\frac{a_0}{2}}(a_0)$ (dokonce $\forall a \in (\frac{a_0}{2}, +\infty)$) a $\forall b \in \mathbb{R}$

$$|f(a, b, \cdot)| \leq e^{-\frac{a_0}{2}x^2} \quad \Rightarrow \quad f(a, b, \cdot) \in L(\mathbb{R}) \quad \forall a > 0,\ b \in \mathbb{R}.$$

- $\frac{\partial f}{\partial a}(a,b,x) = -x^2 e^{-ax^2} \cosh bx$

  $\frac{\partial f}{\partial b}(a,b,x) = x e^{-ax^2} \sinh bx \in L(\mathbb{R})$ (stejná argumentace)

  $f(a,0,x) = e^{-ax^2} \in L(\mathbb{R})$ (viz příklad dříve)

- Tedy

$$\frac{\partial}{\partial b} I(a,b) = 2\int_0^\infty \underset{\downarrow\; -\frac{1}{2a}e^{-ax^2}}{x e^{-ax^2}} \underset{\downarrow\; b\cosh bx}{\sinh bx} = 2\underbrace{\left[-\frac{1}{2a}\sinh bx\, e^{-ax^2}\right]_0^\infty}_{=0}$$

$$+\frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-ax^2} b\cosh bx = \frac{b}{2a} I(a,b)$$

Tedy řešení ODR s parametrem a:

$$\frac{\partial}{\partial b}\ln I(a,b) = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{b^2}{4a} + c(a)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln I(a,b) = \frac{b^2}{4a} + c(a)$$

$$\Downarrow$$

$$I(a,b) = K(a)\exp\frac{b^2}{4a}$$

Dosazení $b=0$:

$$I(a,0) = K(a), \text{ ale } I(a,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Tedy

$$I(a,b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\frac{b^2}{4a}$$

VA

(2) Buď $F(b) = \int_0^1 \frac{x^b}{1+x}\,dx$. Ukažte, že $F \in C((-1,+\infty))$.

Řešení

- $f(b,x) = \frac{x^b}{1+x} \in C((0,1))$ pro $\forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow f(b,\cdot) \in M((0,1))$
- pro $x \in (0,1)$: $\frac{x^b}{1+x} \in C(\mathbb{R})$
- zbývá vyjádřit pro jaká b: $\frac{x^b}{1+x} \in L(0,1)$

Avšak:

$$\int_0^1 \frac{x^b}{1+x} = \underbrace{\int_0^\varepsilon \frac{x^b}{1+x}}_{\substack{\geq 0 \\ \in L((0,\varepsilon)) \\ \iff b>-1}} + \underbrace{\int_\varepsilon^1 \frac{x^b}{1+x}}_{\substack{\in C(\langle \varepsilon,1\rangle) \\ \Downarrow \\ \in L(\langle \varepsilon,1\rangle)}}$$

$\boxed{\text{ZÁVĚREČNÁ POZNÁMKA}}$

Víme, že $\left(C(\Omega);\ \int_\Omega |f(x)|dx\right)$ není úplný.

Uvažujme tedy

$$\left(L(\Omega);\ \int_\Omega |f(x)|dx\right)$$

Pak $\|f\|_1 := \int_\Omega |f(x)|dx$ splňuje

(i) $\|f\|_1 \geq 0$

(ii) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

(iii) $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1$

Přesto $\|f\|_1$ není norma na $L(\Omega)$, neboť

$\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ s.v. (tedy nejen pro $f \equiv 0$)

$(L(\Omega), \|\cdot\|_1)$ tedy není normovaný prostor

Lze však zavést

$L^1(\Omega) = L(\Omega)/\sim$, kde $f \sim g \iff f = g$ s.v. $\Rightarrow (L^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ je úplný.

KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

Úvod & Motivace

Křivkový a plošný integrál nejsou nové typy integrálů jako byly Riemannův, Newtonův či Lebesgueův integrál. Nepůjde nám o konstrukci, ale o pochopení jak využít Lebesgueův integrál k výpočtu integrálu na křivkách, plochách či jejich zobecněních: k-plochách v d-rozměrném prostoru, $d \in \mathbb{N}$ a $1 \le k \le d$. (Je-li $k = d$, pak se jedná o (pro nás již známý) Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^d$.)

Je-li $\boxed{k=1}$ mluvíme o křivkovém integrálu, neboť 1-rozměrné objekty v $\mathbb{R}^d$ jsou křivky (trajektorie).

Křivkou φ rozumíme zobrazení z intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^d$. Budeme uvažovat křivky, které zobrazují (a,b) na svůj obraz značený $\langle\varphi\rangle$ prostě a které jsou třídy C^1. Tzn.

$$\underline{\varphi : (a,b) \xrightarrow{\text{na}} \langle\varphi\rangle \subset \mathbb{R}^d} \quad \text{a} \quad \varphi'(t) \text{ existuje } \forall\, t \in (a,b)$$

$$\text{a} \quad \varphi' \in C((a,b)) \Rightarrow \boxed{\varphi \in C^1((a,b))}$$

$$\text{a} \quad \varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b).$$

viz příklad na str. 3

Rozlišujeme 2 významné třídy křivkových integrálů:

[1] KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 1. DRUHU

značíme $\displaystyle\int_{\langle\varphi\rangle} f \, ds$ kde f skalár

Význam: $f \equiv 1 \Rightarrow$ délka křivky

$f = \varrho$ hustota $\Rightarrow$ hmotnost "drátku" popsaného křivkou $\langle\varphi\rangle$ s hustotou ϱ.

---

[2] KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 2. DRUHU

značíme $\displaystyle\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{t} \, ds$

kde $\vec{f}$ vektorová funkce

$\vec{ds} = \vec{t}\, ds$

$\vec{t}$ … tečný vektor podél $\langle\varphi\rangle$

Význam: práce potřebná k překonání síly $\vec{f}$ působící proti pohybu podél $\langle\varphi\rangle$

hmotného bodu pohybující se

Otázka Jak křivkové integrály počítat?

Odpověď: Motivování vzorečku (odvození vzorečku) pro délku křivky:

1. DRUHU $\int_{\langle\varphi\rangle} 1\, ds = \int_a^b \sqrt{[\varphi_1'(t)]^2 + \dots + [\varphi_d'(t)]^2}\, dt = \int_a^b |\vec{\varphi}'(t)|_2\, dt$

$\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^d$

$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))$

kde poslední integrál je JEDNOROZMĚRNÝ (Lebesgueův či Riemannův) integrál na (a,b),

zavedeme,

pro skalární f definovanou na otevřené množině obsahující $\langle\varphi\rangle$ vztah

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f\, ds \left(= \int_{\langle\varphi\rangle} f(\overset{x_1,\dots,x_d}{\overset{\shortparallel}{s}})\, ds \right) \overset{df}{=} \int_a^b f(\vec{\varphi}(t))\, |\vec{\varphi}'(t)|_2\, dt$$

2. DRUHU Je-li $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^d$, pak $\vec{t} = \frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\varphi'(t)|_2}$ (tečný vektor ke $\langle\vec{\varphi}\rangle$ v $\vec{\varphi}(t)$) a tak

$$\boxed{\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{ds} = \int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{t}\, ds = \int_a^b \vec{f}(\vec{\varphi}(t))\cdot \frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\vec{\varphi}'(t)|_2}\, |\vec{\varphi}'(t)|_2\, dt = \int_a^b \vec{f}(\vec{\varphi}(t))\cdot\vec{\varphi}'(t)\, dt}$$

Všimněme si, že ⓐ z pohledu d-rozměrného (Lebesgueova) integrálu integrujeme, pro $d \geq 2$, přes křivky, které mají d-rozměrnou Lebesgueovu míru rovnou 0.

ⓑ Stejnou křivku mohu popsat různými parametrizacemi

např. • $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$ nebo $t \in (0, 4\pi)$

$\Rightarrow \varphi'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

• $\varphi(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$ $\quad t \in (-\pi, \pi)$

$\Rightarrow \varphi'(t) = (-2t \sin t^2, 2t\cos t^2) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0.$

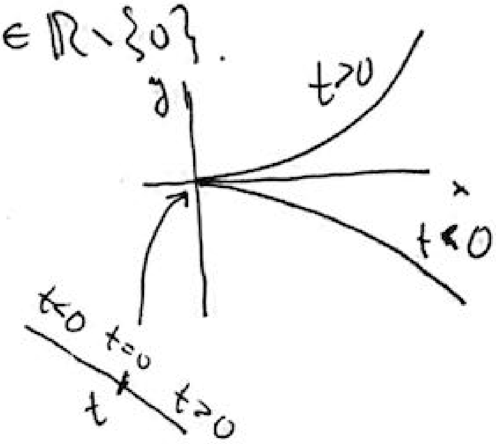
Vždy popisuje φ kružnici $\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, v prvním případě $\vec{\varphi}'(t) \neq 0$ vždy ale φ není prosté pro intervaly větší než $(0, 2\pi)$.

V druhém případě se v $t=0$ mění směr pohybu a pohybujì se po křivce naopak.

Proto $\vec\varphi(t) = (t^2, t^3)$ nepopisuje hladkou křivku. Všimni:

- $\vec\varphi'(t) = (2t, 3t^2) = (0,0) \Rightarrow \vec\varphi'(t) \neq 0$ pro $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- $x = t^2,\ y = t^3$ a $t>0$ $\quad y = x^{3/2}$

  $x = t^2,\ y = t^3$ a $t<0$ $\quad y = -x^{3/2}$



Q: • Není jasné, zda takto definované integrály nezávisí na parametrizaci – to by byl nežádoucí efekt.

• Je třeba ověřovat podmínku $\vec\varphi'(t) \neq 0$ a požadovat, aby φ bylo na (a,b) prosté (jinak musí počítat vícenásobná oběhnutí).

▶ Je-li $\boxed{k=2}$ mluvíme o plošném integrálu, neboť 2-rozměrné objekty v $\mathbb{R}^d$ (speciálně v $\mathbb{R}^3$, tzn. $d=3$) jsou plochy.

Motivováni popisem kulové a válcové plochy (sférické a cylindrické souřadnice) a dosud ohledně křivek definujeme

Jednoduchou plochu φ jako prosté zobrazení intervalu $\overbrace{(a,b)\times(\alpha,\beta)}^{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ na obraz $\varphi(\Omega)$ takové, že $D\varphi$ existuje $\forall (u,v)\in\Omega$

a $$D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$ má v Ω hodnost 2

Př. $$\begin{cases} \varphi_1 : (\rho,\alpha) \longmapsto (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, \sqrt{1-\rho^2}) & \text{kde } \rho\in(0,1),\ \alpha\in(0,2\pi) \\ \varphi_2 : (\psi,\varphi) \longmapsto (\cos\psi\sin\varphi, \sin\psi\sin\varphi, \cos\varphi) & \text{kde } \psi\in(0,2\pi),\ \varphi\in(0,\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

popisují severní polosféru.

Máme tedy 2 různé parametrizace (φ_1 resp. φ_2) stejné jednoduché plochy v $\mathbb{R}^3$.

Opět rozlišujeme dva druhy plošných integrálů:

$\boxed{\text{[1] PLOŠNÝ INTEGRÁL 1. DRUHU}}$ značíme $\displaystyle\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} f\, dS$ kde f je skalár

význam: $f = 1$ • obsah plochy $\langle\varphi(\Omega)\rangle$

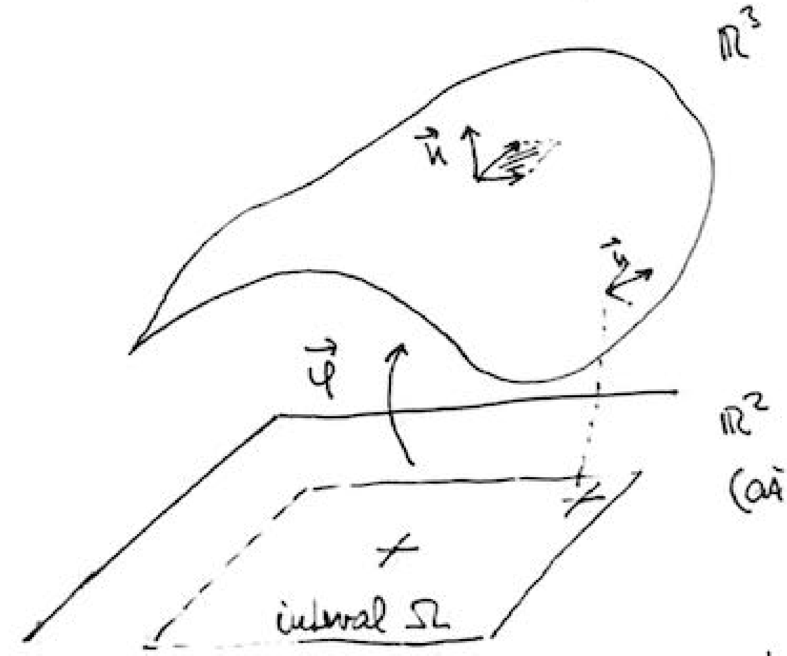
$f = \rho$ • hmotnost plochy

$\boxed{\text{[2] PLOŠNÝ INTEGRÁL 2. DRUHU}}$ značíme $\displaystyle\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f}\cdot d\vec{S}$ kde $\vec{f}$ je vektorová fce z $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f}\cdot\vec{n}\, dS$$

význam: tok veličiny $\vec{f}$ (např. tepla, je-li $\vec{f}$ tepelný tok) přes plochu $\langle\varphi(\Omega)\rangle$

<u>Otázka</u>: Jak plošné integrály počítat?



tečná nadrovina je určena v daném bodě vektory
$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\right)$$
a
$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\right)$$

Normálový vektor $\vec{n}$ je pak dán (až na znaménko) jako vektorový součin
$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}$$

tedy: $\vec{n} = \left(\dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right) \Big/ \left|\dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right|$

"Motivace":
$$\int_{\varphi(\Omega)} dS = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla z|^2} = \int_{\Omega} \quad du\, dv$$ OBSAH PLOCHY

Parametrizace v případě, kdy plocha je dána jako graf fce

$\vec{\varphi}:\ \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{(u,v)}} \longmapsto \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{(u,v,z(u,v))}}$ $\Rightarrow \dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} = \left(1, 0, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right) \times \left(0, 1, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(-\dfrac{\partial z}{\partial u}, -\dfrac{\partial z}{\partial v}, 1\right)$

Tedy

1\. druhu $\displaystyle\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} f\,dS \overset{df}{=} \int_{\Omega} f(\vec\varphi(u,v))\, \left\| \frac{\partial\vec\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\vec\varphi}{\partial v}\right\|_2 du\,dv$

2\. druhu $\displaystyle\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec f\cdot\vec{dS} = \int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec f\cdot\vec n\, dS = \int_{\Omega} \vec f(\vec\varphi(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\vec\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\vec\varphi}{\partial v}\right) du\,dv$

OTÁZKA: Jak bychom počítali 3-plochy v $\mathbb{R}^4$?

⊳ Existují, a to i v dimenzi 3, několik vět a vzorečků, které spojují objemové, plošné a křivkové integrály:

- Věta o potenciálu,
- Greenova věta,
- Gaussova nebo Gauss-Ostrogradského věta,
- Stokesova věta,

které jsou zobecněními 1-rozměrného Newtonova vzorečku

$$(\square)\qquad \boxed{\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$

Věta o potenciálu souvisí s křivkovým integrálem 2. druhu a je úzce spojená s $(\square)$ a s existencí potenciálu U k vektorovému poli $\vec f$. Za této situace:

$$\begin{aligned}\int_{\langle\varphi\rangle}\vec f\cdot\vec{ds} &= \int_a^b \nabla U(\vec\varphi(t))\cdot\vec\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}U(\vec\varphi(t))\,dt\\ &= U(\vec\varphi(b)) - U(\vec\varphi(a)).\end{aligned}$$

Greenova věta se týká $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a její hranice $\partial\Omega$, která tvoří jednoduchou uzavřenou křivku v $\mathbb{R}^2$.

[tj. $\varphi:(a,b) \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(a) = \varphi(b)$
$\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in (a,b)$]

Pak
$$\int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)}_{\operatorname{curl} \vec{f}} dx\,dy$$

integrál 2. druhu

$\operatorname{curl} \vec{f}$ ve dvou dimenzích je skalár

Stokesova věta se týká plochy $G \subset \mathbb{R}^3$ a její hranice ∂G, která vytváří uzavřenou křivku v $\mathbb{R}^3$

Platí:
$$\boxed{\int_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{G} \underbrace{\operatorname{curl} \vec{F}}_{\text{vektor}} \cdot \vec{dS}}$$

$$\int_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{t}\, ds \qquad \qquad \int_{G} \operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

Gaussova věta se týká $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a její hranice $\partial\Omega$, která představuje plochu v $\mathbb{R}^3$. Typický příklad je $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ a $\partial\Omega = \partial B_1(0)$.

Platí:
$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy\,dz$$

neboli
$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS}$$

Otázka: Dají se všechny tyto věty / formule nahlédnout jako důsledek jediného vzorce? Ano. $\int_{\partial\Omega} F = \int_{\Omega} dF$ v jazyce diferenciálních forem.

13. Měřitelné množiny, míry, Lebesgueovy L^p prostory

[Measurable sets, measures, Lebesgue L^p spaces]

Lebesgueův integrál jsme vybudovali na pojmech „množiny míry nula", „jednoduché funkce", „monotonie", „limitní přechody" a zavedli jsme při konstrukci následující prostory funkcí

- H .... schodovité funkce
- M^+, L^+ .... nezáporné měřitelné a lebesgueovy (lebesgueovy) integrovatelné funkce
  POZOR! Nejsou vektorové prostory.
- M, L .... měřitelné (lebesgueovy) a lebesgueovy integrovatelné fce.

Nyní od funkcí přejdeme k množinám (lebesgueovsky a borelovsky měřitelným) a k zobrazením definovaným na množinách (tj. mírám).

13.1 Měřitelné množiny a míry

Def Řekneme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je Lebesgueovsky měřitelná jestliže charakteristická funkce χ_Ω je lebesgueovsky měřitelná, tzn.

$$\boxed{\chi_\Omega \in M^+}$$

Označení $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je systém všech lebesgueovsky měřitelných množin

Připomeňme, že $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ označuje systém všech podmnožin v $\mathbb{R}^d$. Tedy máme $\Lambda(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Jak je ukázáno v konstrukci na konci této podkapitoly, lze (za předpokladu platnosti Axiomu výběru) sestrojit neměřitelné množiny. Odsud plyne

$$\Lambda(\mathbb{R}^d) \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d),$$

neboli není pravda, že každá podmnožina v $\mathbb{R}^d$ je měřitelná. Chtěli bychom vědět o struktuře $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ více.

Začneme připomenutím pojmů topologie a topologického prostoru.

$\boxed{\text{Def.}}$ Soubor podmnožin $\mathcal{T}$ množiny X (tzn. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$) se nazývá <u>topologie</u> $\overset{\text{df.}}{\equiv}$

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
- $A_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$

neboli topologie obsahuje alespoň $\emptyset$ a X a pak je uzavřená na konečné průniky a libovolná sjednocení. $(X, \mathcal{T})$ je <u>topologický prostor</u>

Nyní zavedeme jinou strukturu, nazývanou <u>σ-algebra</u> (kde σ referuje k spočetným sjednocením)

$\boxed{\text{Def}}$ Soubor podmnožin Σ množiny X (tzn. $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$) se nazývá <u>$\sigma$-algebra</u> $\overset{\text{df.}}{\equiv}$

- $X \in \Sigma$
- $A \in \Sigma \Rightarrow A^c := X \setminus A \in \Sigma$
- $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma$, $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma$

(X, Σ) se nazývá měřitelný prostor.

<u>Poznámka</u>
- Lze nahradit 2. a 3. bod v definici body
  - $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$
  - $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma$.
- z prvních dvou vlastností σ-algebry plyne, že $X, \emptyset \in \Sigma$.

<u>Příklady</u> ① $\{\emptyset, X\}$ je topologie i σ-algebra

② $\mathcal{P}(X)$ je topologie i σ-algebra

③ $\{\emptyset, \mathbb{R}, (0,1)\}$ je topologie v $\mathbb{R}$, ale není σ-algebra

④ Připomeň, že topologie v $\mathbb{R}^d$ je generována $B_\varepsilon(x_0)$, kde $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}^d$ jsou libovolné a $B_\varepsilon(x_0) := \{y \in \mathbb{R}^d ;\ \|y - x_0\|_{\infty, \mathbb{R}^d} < \varepsilon\}$.

Topologie obsahuje "jen" otevřené množiny (neb jsou-li A, B, A_α otevřené $\Rightarrow A \cap B$ a $\bigcup A_\alpha$ jsou otevřené).

Povšimněme si, že v takto definované topologii jsou jejími generátory otevřené intervaly, které jsou dle definice (lebesgueovské) měřitelnosti (lebesgueovsky) měřitelné.

Není těžké nahlédnout, viz důkaz Věty 13.1 níže, že platí: $\underbrace{B_\varepsilon(x_0) \cap B_\xi(x_1) \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \text{ a } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon_n}(x_n) \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$.

a tedy

$$A \in \mathcal{T} \text{ pak } A \in \Lambda(\mathbb{R}^d).$$

Také vidíme, že je přirozené zavést (nejmenší) Σ-algebru generovanou topologií, tj. souborem všech otevřených množin. Protože otevřené množiny jsou, dle výše uvedeného, prvky $\Lambda(\mathbb{R}^d)$, tj. jsou lebesgueovsky měřitelné, tak se dá snadno nahlédnout, viz důkaz Věty 13.1, že takto generovaná σ-algebra je podmnožinou $\Lambda(\mathbb{R}^d)$. Tato σ-algebra se označuje $\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ a nazývá se <u>σ-algebra borelovsky měřitelných množin</u>.

Obsahuje nejen otevřené, ale i uzavřené množiny, ale také spočetné průniky otevřených množin (tzv. množiny G_δ), a všechna spočetná sjednocení uzavřených množin (tzv. množiny F_σ), atd. ($G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta}$, ...).

Ve Větě 13.1 si ukážeme, že $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je Σ-algebra.

Odsud a z předchozího plyne, že

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \Lambda(\mathbb{R}^d)$$

což "dokazuje" tvrzení: „skoro všechny množiny jsou měřitelné".

Ozn. G_δ, F_σ pochází z němčiny a francouzštiny:

G ... geöffnet, gebiet
F ... fermé
$\cap$ ... δ ... Durchschnitt
$\cup$ ... σ ... somme

Platí

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneqq \Lambda(\mathbb{R}^d)$$

$\boxed{\text{Def}}$ Buď $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$. Pak zobrazení $\mu : \Sigma \to \underbrace{\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}}_{\langle 0, +\infty \rangle}$

se nazývá <u>míra</u> $\overset{df}{\equiv}$

1) Σ je σ-algebra
2) μ je nezáporná a $\mu(\emptyset) = 0$
3) μ je σ-aditivní, tj. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma$
- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

a navíc, jsou-li $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i, j, \ i \neq j$
- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

$\boxed{(X, \Sigma, \mu) \text{ se nazývá prostor s mírou}}$

$\boxed{\text{Def.}}$ ▶ Řekneme, že $\boxed{\text{míra } \mu \text{ je úplná}}$ pokud platí:

Je-li $A \subset B$ a $B \in \Sigma$ a $\mu(B) = 0$, pak $A \in \Sigma$

$[\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B) = 0] \Longrightarrow$ (a nutně $\mu(A) = 0$)

▶ Řekneme, že <u>míra μ je absolutně spojitá vzhledem k míře ν</u>, píšeme $\boxed{\mu \ll \nu}$ $\overset{def}{\equiv}$ Je-li $A \in \Sigma$ a $\nu(A) = 0$, pak $\mu(A) = 0$.

$\boxed{\text{Věta 13.1}}$ ▶ Systém všech Lebesgueovsky měřitelných množin $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je σ-algebra

▶ Definujeme-li pro libovolné $f \in M^+(\mathbb{R}^d)$ zobrazení
$$\nu_f : \Lambda(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^*_{\geq 0} \text{ předpisem}$$
$$\nu_f(\Omega) := (\mathcal{L})\int_{\Omega} f \, dx := \int f \chi_{\Omega},$$

pak ▶ ν_f je úplná (ii) míra (i), která je absolutně spojitá (iii) vzhledem k Lebesgueově míře λ_d definované
$$\lambda(\Omega) \overset{df}{=} \lambda_d(\Omega) := \int \chi_{\Omega}. \qquad (\nu_f \ll \lambda_d)$$

Důkaz $\boxed{\text{Krok 1}}$ $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je Σ-algebra.

(a) $\boxed{\mathbb{R}^d \in \Lambda(\mathbb{R}^d)} \iff 1 \in \mathcal{M}^+$, avšak $h_n = \chi_{[-n,n]^d} \nearrow 1$

a tedy $1 = \sup h_n \in \mathcal{M}^+$ dle definice $\mathcal{M}^+$.

(b) $\boxed{A, B \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \Rightarrow A \setminus B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$

Jsou-li $A, B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, tj. $\chi_A, \chi_B \in \mathcal{M}^+$, pak viz Věta 3.3, Věta 3.11,

$$\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$$
$$\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$$

a proto

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_{A\setminus(B\cap A)} = \chi_A - \chi_{B\cap A} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$$

tak $A\setminus B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$.

(c) $\boxed{A_n \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \bigcup A_n \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$ neboť $\chi_{A_n} \in \mathcal{M}^+$ a

tedy $\sup\limits_n \chi_{A_n} \in \mathcal{M}^+ \iff \chi_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} \in \mathcal{M}^+ \iff \bigcup A_n \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$.

$\boxed{\text{KROK 2}}$ $\boxed{\text{Vlastnosti } \nu_f}$

(1) ν_f je definována na $\underline{\sigma\text{-algebře}}$ $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ a $\nu_f(\Omega) \geq 0$ pro $f \geq 0$ a $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ neboť $f\chi_\Omega \geq 0 \overset{\text{Věta 3.3}}{\Rightarrow} \int f\chi_\Omega \geq 0$.

(2) Jsou-li $A_i \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, $i \in \mathbb{N}$, navzájem disjunktní, pak

$$\sum_{i=1}^\infty \nu_f(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \int f\chi_{A_i} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^k \int f\chi_{A_i} \overset{\text{aditivita}}{=}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int f \chi_{\bigcup_{i=1}^k A_i} \underset{\chi_{\bigcup_{i=1}^k A_i} \nearrow \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}}{\overset{\text{Levi}}{=}} \int f \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}$$
$$= \nu_f\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right).$$

(3) $\boxed{\nu_f \text{ je úplná}}$

Vskutku, je-li $A \subset B$ a $B \in \Sigma$ a $\nu_f(B) = 0$ pak

$$\nu_f(B) = \int f\chi_B = 0 \underset{\text{V.3.8}}{\Rightarrow} f\chi_B = 0 \text{ s.v.} \Rightarrow f\chi_A = 0 \text{ s.v.}$$
$$\int f\chi_A = 0 \Longrightarrow \nu_f(A) = 0$$

(4) $\boxed{\nu_f \ll \lambda_d}$

Je-li $\lambda_d(E) = 0$, pak $\chi_E = 0$ s.v., pak $f\chi_E = 0$ s.v. $\Rightarrow \nu_f(E) = 0$.

DVĚ DŮLEŽITÉ POZNÁMKY

(1) ν_f a speciálně Lebesgueova míra nejsou úplné na σ-algebře borelovsky měřitelných fcí $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (ani pro $d=1$).

(2) • Z předchozí věty plyne existence ∞-mnoha měr, které lze na $\mathbb{R}^d$ zavést. Význačnou vlastností Lebesgueovy míry je její normalizace na objem jednotkové krychle

$$\lambda_d\left([0,1]^d\right) = 1.$$

• Z předchozí věty plyne implikace

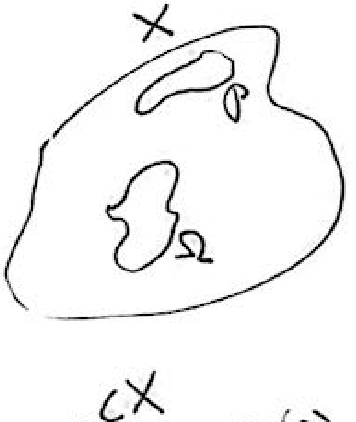
$$\boxed{\nu_f(\Omega) := \int_\Omega f \chi_\Omega \text{ kde } f\in L, f\geq 0} \Rightarrow \boxed{\nu_f \ll \lambda_d}$$

Platí (za předpokladu konečnosti míry λ_d na X, definice je uvedena níže) obrácená implikace tzv Radon-Nikodymova věta:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Je-li } \nu \ll \lambda \text{ a } \lambda(X) < +\infty, \\ \text{pak } \exists f \geq 0,\ f\in L(X) \text{ tak, že } \nu(\Omega) = \int_\Omega f(x)\,dx\end{array}}$$

Jiný zápis $\quad \nu \ll \lambda \iff \exists f\in L(X)\quad \nu(\Omega) = \int_\Omega f(x)\,d\lambda(x)$

Fyzikální interpretace Buď $X \subset \mathbb{R}^3$ omezená, otevřená, souvislá.



Nechť X představuje "spojité (homogenizované/průměrované)" prostředí (tekutiny, plyny, pevné látky). V takovém prostředí je přirozené požadovat:

je-li objem nějaké podmnožiny $\Omega\subset X$ nulový, je pak i hmotnost látky přiřazené této množině nulová.

$P\subset X$

$P \longmapsto V(P)$

$P \longmapsto M(P)$

jsou dvě míry. Výrok v $\boxed{\ldots}$ říká, že $M \ll V$. Pak dle Radon-Nikodymovy věty existuje $\rho\in L^+(\Omega)$ tak, že $M(\Omega) = \int_\Omega \rho\, dV \quad \forall\, \Omega\in\Lambda(X)$.

$\boxed{\rho \text{ se nazývá hustota}}$

DVĚ DŮLEŽITÁ/ZAJÍMAVÁ ROZŠÍŘENÍ

$\boxed{1}$ Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ($f \geq 0$) spojitá, pak $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ nejen splňuje $F'(x) = f(x)$, ale (navíc) $\nu_f((a,x)) := \int_a^x f(s)\,ds$ je <u>míra</u> (úplná a <u>absolutně spoj. vzhledem k Lebesgueově míře</u>) a platí

$$\boxed{\nu_f((a,x)) = F(x) - F(a) \quad a \quad \nu_f((a,b)) = F(b) - F(a)}$$

Tyto poslední vztahy mohu zobecnit a zavést další/jiné míry obecněji.

<u>Buď F neklesající na $\langle a,b\rangle$</u>. Pak f může mít nejvýše spočetně bodů nespojitosti. Je-li x_0 bod nespojitosti, pak $F(x_0+) := \lim_{x \to x_0+} F(x)$ a $F(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} F(x)$, přičemž obě limity z monotónie existují a $F(x_0)$ může být jakákoliv hodnota mezi $F(x_0-)$ a $F(x_0+)$. (Dře) definujeme-li $F(x_0) = F(x_0+)$, pak F je nejen <u>neklesající</u> na $\langle a,b\rangle$, ale také <u>spojitá zprava</u>. Platí:

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ ▶ Je-li F neklesající fce na $\mathbb{R}$ spojitá zprava, pak existuje jediná míra μ (často značená dF) definovaná na σ-algebře Lebesgueovy měřitelných množin tak, že

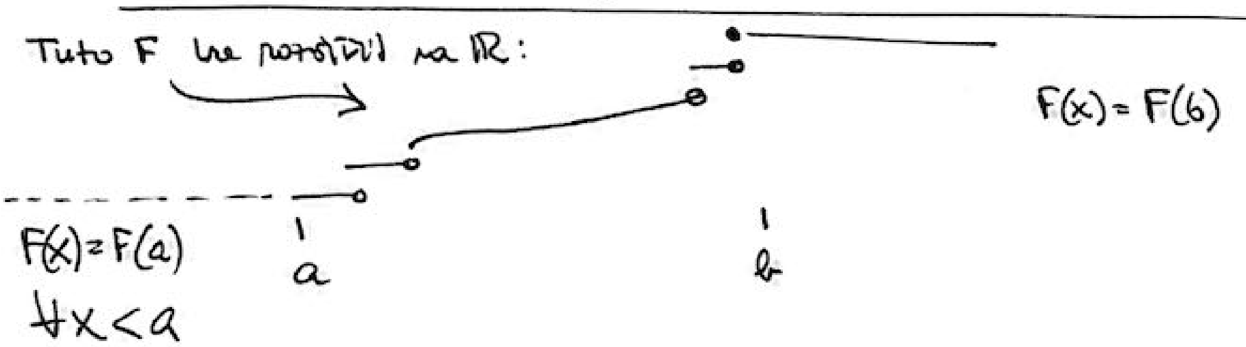
$$\mu((a,x]) = F(x) - F(a).$$

▷ Naopak, je-li μ míra definovaná na σ-algebře Lebesgueovy měřitelných množin, která je konečná na omezených intervalech, pak F definovaná

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu((-x,0]) & x < 0 \end{cases}$$

je neklesající a spojitá zprava.

Tuto F lze rozšířit na $\mathbb{R}$:



? K čemu je toto zobecnění vhodné? (užitečné)

Podobně jako jsme aproximovali plochu pod grafem nezáporné funkce, můžeme zkusit měřit statický moment rovinné či prostorové oblasti. Moment hmotného bodu $x \in (a,b)$ hmotnosti μ vzhledem k počátku je roven $|x|\mu$. Máme-li n-bodů $x_i \in (a,b)$ s hmotností μ_i, pak moment přiřazený úsečce (a,b) je $\sum_{i=1}^{m} |x_i|\mu_i$. Obecně: Je-li

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = b$$

dělení (a,b), $\xi_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ a je-li $\mu(x)$ hmotnost úsečky $[a,x)$. Pak pro $\forall j \in \{1,\dots,m\}$ je hmota úsečky

$$\mu(\alpha_j) - \mu(\alpha_{j-1})$$

Soustředíme-li tuto hmotu do bodu ξ_j, pak moment segmentu (α_{j-1}, α_j) je roven $|\xi_j|\left(\mu(\alpha_j) - \mu(\alpha_{j-1})\right)$

a moment (a,b) vzhledem k počátku je přibližně

$$\sum_{j=1}^{m} |\xi_j| \left(\mu(\alpha_j) - \mu(\alpha_{j-1})\right)$$

Limitním přechodem dostaneme objekt, který lze označit

$$M = \int_a^b |x| \, d\mu(x) \quad \dots \text{ \underline{Stieltjesův} \underline{integrál}}$$

- Riemann-Stieltjess
- Lebesgue-Stieltjes

Místo $|x|$ může být jiná funkce:

např. $$I = \int_a^b |x|^2 \, d\mu(x) \quad \dots \text{ moment setrvačnosti}$$

nebo $$J_k = \int_a^b |x|^k \, d\mu(x) \quad \dots \text{ } k\text{-tý moment}$$

__Také__ • Křivkový integrál 1. druhu

$$\int_{\langle\varphi\rangle} \underset{\substack{\text{hustota}\\ \text{drátu}\\ \geq 0}}{f} \, ds = \int_a^b \underbrace{(f \circ \vec{\varphi})}_{\geq 0}(t) \underbrace{|\vec{\varphi}'(t)|}_{\substack{\text{délka}\\ \ell}} \, dt = \int_a^b (f \circ \vec{\varphi}) \, dv \qquad v(t) = \ell(\varphi; \langle a,t \rangle)$$

lze nahlížet jako Stieltjesův integrál a

• Křivkový integrál 2. druhu: $$\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_a^b (\vec{f} \circ \vec{\varphi})(t) \cdot \vec{\varphi}'(t) \, dt = \sum_{1}^{d} \int_a^b f_k(\vec{\varphi}) \, d\varphi_k$$

[2] Pravděpodobnostní prostor

• $\mu: \Sigma \to \mathbb{R}_0^+$ je pravděpodobnostní míra $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ $\mu(X) = 1$.

Def. Řekneme, že $\mu: \Sigma \to \mathbb{R}_0^+$ je konečná $\overset{\text{def}}{\equiv}$ $\mu(X) < +\infty$

$\hookrightarrow$ σ-algebra měř. množin X

Řekneme, že $\mu: \Sigma \to \mathbb{R}_0^+$ je σ-konečná $\equiv$ existují-li $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\boxed{\mu(X_n) < \infty}$ & $\boxed{X_n \nearrow X}$

(tzn. $X_{n+1} \supset X$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$)

Prostor s mírou (X, Σ, P) — σ-algebra (Σ), konečná míra taková, že $P(X) = 1$ (P) — se nazývá pravděpodobnostní prostor.

Příklady ① Buď $X = \{w_1, \dots, w_N\}$ konečná množina, Buď $\{p_j\}_{j=1}^{N}$ nezáporná čísla taková, že $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$.

Buď Σ systém všech podmnožin X, tzn. $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ je σ-algebra

Pak pro $\forall A := \{w_{j_1}, \dots, w_{j_m}\} \in \Sigma$ s $1 \le j_1 \le \dots \le j_m \le N$

definujme $P(A) = \sum_{k=1}^{m} p_{j_k}$. Pak (X, Σ, P) je diskrétní pravd. prostor

② $X = \mathbb{R}^d$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a $f \geq 0$ integrovatelná funkce t.ž., že

$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dx = 1$

[Je-li $d = 1$, vol např.
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}$$
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1.]$$

Pak $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P)$ je pravděp. prostor,

pokud $P(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) \, dx$.

③ Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^d$ je pevný. Definujme $P(\Omega) = \begin{cases} 1 & x_0 \in \Omega \\ 0 & x_0 \notin \Omega \end{cases}$

Pak $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\delta), P)$ je také pravděpodobnostní prostor

$\uparrow$ Diracova bodová míra. $P = \delta_{x_0}$

Příklad (konstrukce neměřitelné množiny) Tato konstrukce je založena na Axiomu výběru a jednoduchém vztahu ekvivalence mezi reálnými čísly z $[0,1]$.

Řekneme, že $x, y \in [0,1]$ jsou <u>ekvivalentní</u>, $x \sim y$, právě když $x - y \in \mathbb{Q}$ (rozdíl je racionální)

(snadno platí: $x \sim x$; $x \sim y \Rightarrow y \sim x$; $x \sim y$ & $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ tedy $x \sim y$ je ekvivalence)

Nyní rozdělíme $[0,1]$ do tříd ekvivalence, např.

- $\mathbb{Q} \subset [0,1]$ tvoří jednu třídu
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + p$, kde $p \in \mathbb{Q}$ tak, že $\frac{\sqrt{2}}{2} + p \in [0,1]$ tvoří další třídu
- atd

Dvě třídy ekvivalence jsou buď stejné nebo disjunktní. A platí

$$[0,1] = \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \quad \text{kde } \mathcal{E}_{\alpha} \text{ je jedna třída ekvivalence.}$$

Nyní definujme naši množinu

$\mathcal{N} = \{x_{\alpha}\}_{\alpha}$ kde $x_{\alpha} \in \mathcal{E}_{\alpha}$ je jediný z $\mathcal{E}_{\alpha}$.

Tato konstrukce je možná díky axiomu výběru: Buď E množina a $\{E_{\alpha}\}$ soubor neprázdných podmnožin E, přičemž množina indexů není spočetná. Pak existuje funkce $\alpha \mapsto x_{\alpha}$ (výběrová funkce) tak, že $x_{\alpha} \in E_{\alpha}$ $\forall \alpha$.

Ukážeme, že $\mathcal{N}$ není měřitelná. Sporem. Nechť $\mathcal{N}$ je měřitelná.

Uvažujme posunutí množiny $\mathcal{N}$ typu

$$\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + r_k$$

kde $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ představuji všechna racionální čísla z $\langle -1, 1 \rangle$

Není obtížné ověřit (OVĚŘTE SI), že:

- N_k jsou navzájem disjunktní
- $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2]$.

Kdyby N byla měřitelná, pak jsou N_k také měřitelné $\forall k \in \mathbb{N}$.
Protože N_k jsou navzájem disjunktní, tak

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N_k) \leq 3.$$

Protože N_k jsou jen posunutí N tak $\lambda_1(N_k) = \lambda_1(N)$.
Tedy

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N) \leq 3,$$

což vede ke sporu jak v případě když $\lambda_1(N) = 0$, nebo když $\lambda_1(N) > 0$ $\boxed{\text{Kz}}$

13.2. Lebesgueovy prostory

nebo také L^p-prostory představují významný matematický nástroj spojující teorii míry, integrální počet a funkcionální analýzu. L^p-prostory jsou významné v teorii diferenciálních rovnic (ODR, PDR), v teorii pravděpodobnosti, moderní analýze, kvantové fyzice.

Z našeho pohledu bude užitečné pozorování, že Lebesgueovy prostory $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le +\infty$, jsou úplné a to vzhledem k integrální normě $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ pro $1 \le p < +\infty$.

Připomeňme, že

$$\Big(C(\Omega), \underbrace{\int_\Omega |f(x)|dx}_{=\|f\|_1}\Big) \text{ úplný není.}$$

DŮLEŽITÉ POZOROVÁNÍ

$\|f\|_1 := \int_\Omega |f(x)|dx$ je norma na $C(\Omega)$,

neboť

1) $\|f\|_1 \ge 0$ a $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \Omega$

2) $\|\lambda f\|_1 = \int_\Omega |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \, \|f\|_1$

3) $\|f+g\|_1 = \int_\Omega |f(x)+g(x)|dx$

$\overset{\Delta\text{-nerovnost v } \mathbb{R} + \text{aditivita}}{\le} \int_\Omega |f(x)|dx + \int_\Omega |g(x)|dx \le \|f\|_1 + \|g\|_1$

!! ALE $\|f\|_1$ <u>není</u> "striktně řečeno" na $L(\Omega)$ = prostor lebesgueovsky integrovatelných fcí.

Proč?

$\boxed{\text{Definice}}$ Pro $\boxed{1 \leq p \leq +\infty}$, definujeme
a $\boxed{\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$

lebesgueovsky integrovatelné fce

a) $\boxed{1 \leq p < \infty}$ $\quad L^p(\Omega) := \{ [f]; |f|^p \in L(\Omega) \}$

b) $\boxed{p = \infty}$ $\quad L^\infty(\Omega) := \{ [f];\ f$ lebesgueovsky měřitelných, $f \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$
$\exists M > 0 \quad |f(x)| < M$ s.v. v $\Omega \}$

Pro $p \in \langle 1, +\infty)$, definujeme $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$, kde $f \in [f]$

Pro $p = \infty$, definujeme

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N \\ \lambda_d(N) = 0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)|$$

Zde $[f]$ označuji třídu ekvivalentních lebesgueovsky měřitelných funkcí. Tzn., f a $\tilde{f} \in [f] \overset{df.}{\equiv} f = \tilde{f}$ s.v. v Ω
Neboli, na základě rovnosti skoro všude mohu lebesgueovsky měřitelné funkce rozdělit do tříd, kde dva reprezentanti stejné třídy se rovnají až na množinu míry nula.

<u>Připomeň</u> definice a vlastnosti pre-Hilbertových, normovaných, metrických prostorů. Také, co jsou Hilbertovy, Banachovy a úplné metrické prostory. Viz kapitola 8.

Lze přidat dvě důležité definice (lze je definovat i pro metrické či topologické prostory)

$\boxed{\text{Def}}$ (i) Řekneme, že $Y \subset (X, \|\cdot\|_X)$ je <u>hustá</u> v X
$\overset{df}{\equiv} \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists y \in Y \quad \|y - x\| < \varepsilon$

(ii) Řekneme, že $(X, \|\cdot\|_X)$ je <u>separabilní</u> $\overset{df.}{\equiv}$ $\exists$ spočetná podmnožina $Y \subset X$, která je <u>hustá</u> v X.

$\boxed{\text{v } \mathbb{R}^d}$ jsme si ukázali, že pro $1 \le p \le +\infty$ platí Hölderova a Minkowského nerovnost, což implikovalo, že

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^d \longmapsto \|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p} \text{ je norma.}$$

Připomeň si v kapitole 8.

Hölderova a Minkowského nerovnost platí i pro L^p-prostory.

$\boxed{\text{Věta 13.2}}$ (Hölderova nerovnost) Buď $f \in L^p(\Omega)$ a $g \in L^q(\Omega)$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \le p \le +\infty$. Pak

- $fg \in L^1(\Omega)$
- $$\left| \int_\Omega fg \, dx \right| \le \int_\Omega |fg| \, dx = \boxed{\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q} \qquad (H)$$

Dk. • Případy $\boxed{p = +\infty, \ q = 1}$ resp. $\boxed{p = 1 \text{ a } q = +\infty}$ jsou jednoduché. SAMI.

• Nechť $\boxed{p \in (1, +\infty)} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \in (1, +\infty)$

Je-li $\|f\|_p = 0$ nebo $\|g\|_q = 0$, pak Hölderova nerovnost triviálně platí.

Je-li tedy $\|f\|_p > 0$ a $\|g\|_q > 0$, pak

$$\frac{f(x)\, g(x)}{\|f\|_p \|g\|_p} \le \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \overset{\text{Young}}{\le} \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

Odsud integrací přes Ω:

$$\left| \int_\Omega \frac{f(x)}{\|f\|_p} \frac{g(x)}{\|g\|_q} \, dx \right| \le \frac{1}{p} \frac{\int_\Omega |f(x)|^p \, dx}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_\Omega |g(x)|^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \underset{\sim}{1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \left| \int_\Omega f(x)\, g(x) \, dx \right|}_{\sim}$$

$$\le \underbrace{\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_\Omega |f(x)\, g(x)| \, dx}_{\sim}$$

a podvlněné dává tvrzení. ∎

$\boxed{\text{Věta 13.3}}$ (Minkowského nerovnost) Buď $p \in \langle 1, +\infty)$. Pak pro $f, g \in L^p$:

$$\boxed{\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p}$$

Dk • Je-li $\boxed{p=+\infty}$ $F = \|f\|_\infty$ je nejmenší číslo takové, že $|f(x)| \le F$ pro s.v. $x \in \Omega$

a $G = \|g\|_\infty$ —— " ——, že $|g(x)| \le G$ pro s.v. $x \in \Omega$

Pak $|f(x)+g(x)| \le F + G$ pro s.v. $x \in \Omega$

což dává tvrzení.

• Je-li $\boxed{p=1}$, důkaz jednodušší a už jsme jej použili dříve.

• Je-li $\boxed{p \in (1,+\infty)}$

$$\|f+g\|_p^p = \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,dx$$
$$= \int_\Omega |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx$$
$$\le \int_\Omega \big(|f(x)|+|g(x)|\big)\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx$$
$$\le \int_\Omega |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_\Omega |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}$$

$\downarrow s = p$ $\quad\downarrow s' = p' = p/_{p-1}$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \|f\|_p \Big(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{\underbrace{\frac{p}{p-1}\,p-1}_{p}}\Big)^{\frac{p-1}{p}} + \|g\|_p\,\|f+g\|_p^{p-1}$$

$$= \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\,\|f+g\|_p^{p-1}$$

a podvlněné implikuje tvrzení. ☺

DŮSLEDEK $\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\big)$ jsou pro $p \in \langle 1, +\infty)$

Normované prostory

Pro $\boxed{p=2}$ je $L^2(\Omega)$ prostor se skalárním součinem

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx.$$

Následující důležitá věta říká, že $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ jsou úplné normované prostory, tedy Banachovy.

$\boxed{\text{Věta 13.4}}$ (Rieszova věta) Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $L^p(\Omega)$, pak existuje $f \in L^p(\Omega)$: $\|f_n - f\|_p \to 0$ pro $n \to \infty$.

{ neboli: $\forall$ cauchyovská posloupnost má v $L^p(\Omega)$ limitu a tedy $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ jsou úplné. }

Dk. Případ $p = +\infty$ je triviální: Z předpokladů plyne existence $N \subset \Omega$, $\lambda_d(N) = 0$, tak, že $\{f_n(x)\}$ je cauchyovská $\forall x \in \Omega \setminus N$. Pro pevné $x \in \Omega \setminus N$ má $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (posloupnost čísel v $\mathbb{R}$) limitu; označme ji $f(x)$. Zbývá ověřit, že $f \in L^\infty(\Omega)$ a $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ pro $n \to \infty$.

Případ $1 \le p < +\infty$ $\boxed{\text{KROK 1}}$ (NALEZENÍ f)

Z $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, a z definice cauchyovskosti, vybereme podposloupnost $g_j := f_{n_j}$ tak, že

$$S := \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\|g_{j+1} - g_j\|_p}_{< \frac{1}{2^j}} < +\infty$$

Označme

$$h(x) := \sum_{j=1}^{\infty} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \ge 0$$

$\boxed{F_j := g_{j+1} - g_j}$

Pak

$$0 \le \int_\Omega |h(x)|^p dx = \int_\Omega \Big(\lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{k} |g_{j+1}(x) - g_j(x)|}_{=: G_k \ge 0 \text{ a } G_k \nearrow} \Big)^p dx$$

$$= \int_\Omega \Big(\lim_{k\to\infty} G_k\Big)^p dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} (G_k)^p$$

$\boxed{z \mapsto z^p \text{ je spojitá}}$

$$\overset{\text{Levi}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_\Omega G_k^p \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (F_1 + \dots + F_k)^p = \lim_{k\to\infty} \|F_1 + \dots + F_k\|_p^p$$

$$\overset{\text{Minkowski}}{\le} \lim_{k\to\infty} \left(\|F_1\|_p + \dots + \|F_k\|_p \right)^p \le \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \|g_{j+1} - g_j\|_p \Big)^p =: S^p < +\infty$$

Tedy $h \in L^p(\Omega) \iff |h|^p \in L^1(\Omega) \Rightarrow |h(x)| < +\infty$ pro s.v. $x \in \Omega$

Také $|g_1(x)| < \infty$ pro s.v. x.

Tedy pro s.v. $x \in \Omega$ ~~aj~~ $\{g_j(x)\}_{j=1}^{\infty} = \{f_{n_j}(x)\}$ cauchyovská

OZNAČ: $\boxed{f(x) := \lim_{j \to \infty} f_{n_j}(x)}$

KROK 2: Zbývá ukázat, že $\|f_n - f\|_p \to 0$ pro $n \to \infty$

Pozorujeme:

- $|f_{n_j}|^p \longrightarrow |f|^p$ s.v. v Ω
- $$|f_{n_j}|^p = |f_{n_j} - f_{n_1} + f_{n_1}|^p \le |f_{n_j} - f_{n_{j-1}} + f_{n_{j-1}} - \dots + f_{n_2} - f_{n_1} + f_{n_1}|^p \le \left(\sum_{l=2}^{j} |f_{n_l} - f_{n_{l-1}}| + |f_{n_1}|\right)^p \le \left(|h| + |f_{n_1}|\right)^p$$

Dle Lebesgue věty

$$\int_\Omega |f|^p = \lim_{j \to \infty} \int_\Omega |f_{n_j}|^p \, dx \le \int \left(|h| + |f_{n_1}|\right)^p < +\infty$$

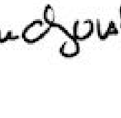
$$\Rightarrow f \in L^p(\Omega).$$

Také z Lebesgueovy věty:

$$\|f - f_{n_j}\|_p^p = \int_\Omega |f - f_{n_j}|^p \longrightarrow 0 \qquad (j \to +\infty)$$

Odsud

$$\|f - f_j\|_p = \|f - f_{n_j}\|_p + \underbrace{\|f_{n_j} - f_j\|}_{\text{podvybraná z cauchyovské.}} \longrightarrow 0$$



ZÁVĚREČNÉ DŮLEŽITÉ KOMENTÁŘE

(i) Z důkazu Rieszovy věty 13.4 plyne:

$$\boxed{\{f_n\}_{n\geq 1}^{\infty} \text{ cauchyovská v } L^p(\Omega)} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\exists \{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ a} \\ \exists f \in L^p(\Omega): \\ f_{n_j} \to f \text{ s.v. v } \Omega\end{array}}$$

Odsud triviálně plyne:

$$\boxed{f_n \longrightarrow f \text{ v } L^p(\Omega) \Rightarrow \exists \{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty} : f_{n_j} \to f \text{ s.v.}}$$

Ze silné konvergence (= konvergence v normě) f_n k f plyne existence vybrané posloupnosti konvergující bodově až na množinu míry nula.

? Je přirozené se ptát, zda neplatí, že celá posloupnost konverguje bodově (až na množinu míry nula)

$$\boxed{Q: \quad f_n \to f \text{ v } L^p \overset{?}{\Rightarrow} f_n \to f \text{ s.v. } \Omega}$$

Příklad, který ukazuje, že tato implikace neplatí:

Uvažujme $\{I_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \langle 0,1\rangle$ soubor intervalů:

$I_0 = \langle 0,1\rangle$; $I_1 = \langle 0,\frac{1}{2}\rangle$, $I_2 = \langle \frac{1}{2},1\rangle$

$I_3 = \langle 0,\frac{1}{4}\rangle$, $I_2 = \langle \frac{1}{4},\frac{1}{2}\rangle$, $I_3 = \langle \frac{1}{2},\frac{3}{4}\rangle$, $I_4 = \langle \frac{3}{4},1\rangle$

$I_7 = \langle 0,\frac{1}{8}\rangle$, ...

⋮

a definujme $f_n := \chi_{I_n}$. Pak $\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |\chi_{I_n}|^2 = |I_n| \to 0$

Lebesg. míra

a tedy $\boxed{\|f_n - 0\|_2 \to 0}$.

Ale: $\forall x \in \langle 0,1\rangle$ $\left.\begin{array}{l}\cdot \limsup f_n(x) = 1 \\ \cdot \liminf f_n(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim f_n(x)$ neexistuje pro $\forall x \in \langle 0,1\rangle$.

vi Zavedli jsme doposud několik typů konvergence pro posloupnosti:

BODOVÁ • $\boxed{f_n \to f \quad \text{bodově v } \Omega} \equiv \forall x \in \Omega : f_n(x) \to f(x)$

SKORO VŠUDE • $\boxed{f_n \to f \quad \text{s.v. v } \Omega} \equiv \exists E \subset \Omega, \lambda_d(E) = 0 \text{ a } \forall x \in \Omega \setminus E : f_n(x) \to f(x)$

V NORMĚ nebo V PRŮMĚRU nebo SILNÁ • $\boxed{f_n \to f \quad \text{v } L^p(\Omega)} \equiv \|f_n - f\|_p \to 0$

STEJNOMĚRNÁ • $\boxed{f_n \rightrightarrows f \quad \text{v } \Omega} \equiv \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

__Platí:__

- BODOVÁ $\Rightarrow$ SKORO VŠUDE
- V NORMĚ $\Rightarrow$ $\exists$ VYBRANÉ PODPOSLOUPNOSTI KONVERGUJÍCÍ S.V.
- STEJNOMĚRNÁ $\Rightarrow$ BODOVÁ
- STEJNOMĚRNÁ $\Rightarrow$ v $L^\infty(\Omega)$
- STEJNOMĚRNÁ & $\lambda_d(\Omega) < \infty$ $\Rightarrow$ v $L^p(\Omega)$ $\forall p \in \langle 1, +\infty)$

Dokažte si sami

__Cvičení:__ Pomocí Hölderovy nerovnosti dokažte:

$\boxed{\Omega \text{ není nutně omezená}}$

Je-li $1 \le p_1 \le p \le p_2 \le \infty$ a $f \in L^{p_2}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega)$, kde $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, pak platí
$$\|f\|_p \le \|f\|_{p_1}^{\lambda} \|f\|_{p_2}^{1-\lambda}$$
kde $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ je určena rovnicí
$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{p_1} + \frac{1-\lambda}{p_2}.$$

Z této interpolační nerovnosti plyne:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f_n \to f \text{ v } L^1(\Omega) \\ \cdot\ \{f_n\} \text{ omezené } \left(\text{tzn. } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^\infty(\Omega)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \to f \text{ v } L^p(\Omega) \text{ pro } \forall p \in \langle 1, +\infty)$$

Z výše uvedeného přehledu lze nabýt (oprávněného) dojmu, že __stejnoměrná konvergence__ je silný typ konvergence, zatímco __konvergence s.v.__ je dost obecný, slabší, typ konvergence.

V tomto kontextu je pozoruhodná následující JEGOROVOVA VĚTA.

$\boxed{\text{Věta 13.5}}$ (Jegorovova) Je-li $\lambda_d(\Omega) < +\infty$, f_n, f lebesgueovsky měřitelné (tzn. $f_n, f \in M(\Omega)$), pak následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) $\quad f_n \to f$ s.v. v Ω

(2) $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists E_\varepsilon \subset \Omega$, lebesgueovsky měřitelná, taková, že

- $\lambda_d(E_\varepsilon) < \varepsilon$
- $f_n \rightrightarrows f$ v $\Omega \setminus E_\varepsilon$

Dk $\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Položme $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. Pak $\lambda_d(E) = 0$ a

$f_n(x) \to f(x)$ pro $\forall x \in \Omega \setminus E$..

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Buď $E \in \Lambda(\Omega)$, $\lambda_d(E) = 0$, taková, že pro $\forall x \in \Omega \setminus E$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Uvažme množiny

$$\Omega_{k,i} := \left\{ x \in \Omega \setminus E ; \ |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \text{ pro } \forall \ m \geq k \right\}$$

(tyto množiny jsou měřitelné).

Pozorujeme, že pro libovolné pevné $i \in \mathbb{N}$ platí:

$$\Omega \setminus E \subset \bigcup_k \Omega_{k,i} \quad \text{a} \quad \Omega_{k,i} \subset \Omega_{k+1,i}$$

a tedy $\quad \lambda_d(\Omega \setminus \Omega_{k,i}) \longrightarrow 0 \quad$ pro $k \to +\infty$.

Tedy, pro dané $\varepsilon > 0$ a pro $\forall i \in \mathbb{N}$, existuje k_i takové, že

$$\lambda_d(\Omega \setminus \Omega_{k_i,i}) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Položme $\quad \Omega_\varepsilon := \bigcap_i \Omega_{k_i,i} \quad$ a $\quad E_\varepsilon := \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$

Pak $\quad \lambda_d(E_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad$ a

$$\sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \qquad \forall i \text{ a } \forall n \geq k_i,$$

tedy $\quad f_n \rightrightarrows f$ v $\Omega \setminus E_\varepsilon$.

▶ Prostory $L^p(\Omega)$ jsou pro $p \in \langle 1, +\infty)$ separabilní. Prostor $L^\infty(\Omega)$ NENÍ separabilní. (Vskutku, uvažujme systém všech podintervalů $I \subset \langle 0,1\rangle$, který je nespočetný. Pak $\|\chi_I - \chi_J\|_\infty = 1$ pokud $\lambda_d(I \setminus J) + \lambda_d(J \setminus I) > 0$. Nelze tedy vybrat spočetný podsystém, který by aproximoval tyto funkce, natož funkce v celém $L^\infty(\Omega)$.)

▶ Ukážeme si v 3. ročníku (nebo v LS), že funkce z

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ \underline{f \in C^\infty(\Omega)},\ \operatorname{supp} f := \text{uzávěr}\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\} \text{ je kompaktní v } \Omega. \}$$

(zde $\underline{\Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ otevřené}}$.)

jsou husté v $L^p(\Omega)$, pro $1 \le p < +\infty$.

— · —

7. FOURIEROVY ŘADY

V roce 1807 (přesněji 21. 12.) Joseph Fourier ohromil své vrstevníky tvrzením:

„Libovolnou funkci lze vyjádřit jako lineární kombinaci sinů a cosinů".

Tyto lineární kombinace se nyní nazývají FOURIEROVY ŘADY. Fourierovy řady se staly nepostradatelným nástrojem analýzy jevů (šíření tepla, vibrace, pohyb planet, elektrické obvody, pohyb vln) studovaných ve fyzice a inženýrských odvětvích. Mnoho důležitých matematických otázek vzniklo a vzniká při vyšetřování vlastností Fourierových řad a vývoj moderní matematické analýzy (včetně zavedení Riemannova a Lebesgueova integrálu) bylo hluboce ovlivněno řešením těchto otázek.

Fourierovy řady slouží k analýze periodických oscilací a vibrací. (Vrátíme se k této situaci později.)

Funkce $A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01})$, $A_2 \sin(2\omega t + \varphi_{02})$, $A_3 \sin(3\omega t + \varphi_{03})$, ... jsou periodické s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Součtem těchto funkcí dostáváme další periodické funkce s periodou T.

Fourier si položil následující otázku:

„Lze každou funkci zapsat ve tvaru součtu sinů a cosinů?"

Obecněji: máme-li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodickou s periodou T (neboli f je T-periodická) [tzn. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z})\ f(x + kT) = f(x)$], lze pak f zapsat ve tvaru $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ a ϕ_n jsou jednoduché T-periodické funkce?"

A vznikají další otázky:

* Jak lze a_m nalézt ?
* Lze je určit jednoznačným způsobem ?
* Konvergují $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$ pro jakoukoliv f ?
* Lze tyto řady integrovat / derivovat ?

Tyto ~~z~~ základní otázky teorie Fourierových řad lze popsat v obecnější části matematiky, tzv. <u>teorii ortonormálních systémů</u>.

$\boxed{\text{Motivace}}$ Uvažujme dva typy řad (Fourierových)

a) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$

b) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_m \sin mx + b_m \cos mx$

- Ukažte, že systémy

(1) $\left\{ \dfrac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$

a

(2) $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{m\in\mathbb{N}}$

tvoří funkce, které jsou navzájem kolmé vzhledem ke skalárnímu součinu $(f,g)_{L^2((-\pi,\pi))} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

v prostoru $L^2((-\pi,\pi))$ a

splňují $\|f\|^2_{L^2((-\pi,\pi))} = (f,f)_{L^2((-\pi,\pi))} = 1.$

(NEBOLI: oba systémy jsou ortonormální v $L^2((-\pi,\pi))$.

- Najděte vztah mezi $\{a_m, b_m\}$ na jedné straně a $\{c_m, c_{-m}\}$ na straně druhé!

$\boxed{7.1}$ Abstraktní Fourierovy řady

$\boxed{7.1.1}$ úplné ortonormální systémy, separabilita

$\boxed{\text{Def}}$ Buď H s $(\cdot,\cdot)_H$ a s $\|\cdot\|_H := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$ Hilbertův (tzn. úplný lineární prostor se skalárním součinem).

Řekneme, že systém $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$, kde I je množina indexů a kde $\phi_\alpha \in H$ $(\forall \alpha)$, je

ortogonální $\equiv$ $(\phi_\alpha, \phi_\beta) = 0$ pro $(\forall \alpha, \beta)(\alpha \neq \beta)$.

ortonormální $\equiv$ $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je ortogonální a $(\phi_\alpha, \phi_\alpha)_H = 1$

úplný $\equiv$ pokud $(\phi, \phi_\alpha) = 0$ pro $\forall \alpha \in I$, pak $\phi = 0$.

$\boxed{\text{Def}}$ Řekneme, že Hilbertův či Banachův prostor je separabilní $\equiv$ $\exists$ hustý spočetný systém v H.
(tzn. $(\exists \{\phi_m\}_{m=1}^{\infty})(\forall \varepsilon > 0)(\forall \phi \in H)(\exists \phi_m)$ $\|\phi_m - \phi\|_H < \varepsilon$)

Ukážeme (viz věta ...), že platí:
Má-li H úplný spočetný ortonormální systém, pak je H separabilní (tzn. lze vygenerovat hustou spoč. část)

$\boxed{\text{Několik příkladů}}$

① Prostor $l_2 := \{ \{x_i\}_{i=1}^{\infty} ; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$ je separabilní Hilbertův prostor (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) neboť $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\phi_n = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-tá pozice}}}{1}, 0, \dots, 0, \dots),$$

tvoří úplný ortonormální systém.

Skal. součin je dán vztahem:

$$x, y \in l_2 \Rightarrow (x, y)_{l_2} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

Ověřte!

② Prostor $X := \{ f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R};\ f$ je nenulová jen v konečně bodech $\}$

s

$$(f,g)_X := \sum_{x\in\langle 0,1\rangle} f(x)g(x)$$ je lineární prostor

se skalárním součinem a úplným ortonormálním systémem $\{\phi_\xi\}_{\xi\in\langle 0,1\rangle}$, kde ϕ_ξ je definováno vztahem

$$\phi_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \xi \\ 1 & x = \xi \end{cases}.$$ Ukažte!

Tedy, X je příkladem Hilbertova prostoru, který není separabilní (neboť úplný ortonormální systém je indexován $\xi \in \langle 0,1\rangle$, což je nespočetná množina).

$\boxed{7.1.2}$ Věta o nejlepší aproximaci

Nyní si položíme následující úkol: Buď $f \in L^2(I)$, $|I| = l$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Najdeme takovou lineární kombinaci prvních N prvků úplného ortonormálního systému $\{e^{in\frac{2\pi}{l}t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ či $\{1, \cos\frac{2\pi n}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}nx\}_{n\in\mathbb{N}}$, která nejlépe aproximuje f.

Či obecněji: Buď H separabilní Hilbertův, $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ úplný ortonormální systém a $f \in H$. Označme $t_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\phi_k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ libovolné. Pak

$\|f - t_m\|_H$ měří „jak dobře t_m aproximuje f"

Otázka nejlepší aproximace je úlohou pro nalezení $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$, která „minimalizují" $\|f - t_m\|_H$. ⊛

ZKUSTE SAMI MINIMALIZOVAT $\|f-t_m\|_H^2$ přes $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Místo řešení minimalizační úlohy, uvažme $f = \sum_{k=1}^{m} c_k\phi_k$. Pak hledaná α_k jsou ta, pro které platí $\alpha_k = c_k$, $k = 1,\dots,m$. Jak můžeme c_k vybrat/identifikovat? $(f,\phi_l)_H = \left(\sum_{k=1}^{m} c_k\phi_k, \phi_l\right) = c_l$.

Snadno. Z ortonormality (nutná!) máme:

Tato pozorování zformulujeme do následujícího tvrzení.

Věta 7.1 Buď H Hilbertův s ortonormálním systémem $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro libovolnou $f \in H$ položme $t_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k$ a $s_m = \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k$, kde $\alpha_k \in \mathbb{C}$ a $c_k := (f, \phi_k)$.

Pak

1) $\|f - s_m\|_H \leq \|f - t_m\|_H$

2) Rovnost nastává právě když $\alpha_k = c_k$ pro $\forall k \in \{1, \dots, m\}$.

Dk Platí:

$$
(*) \quad
\begin{aligned}
\|f - t_m\|_H^2 &= (f - t_m, f - t_m)_H \\
&= \|f\|_H^2 - (t_m, f)_H - (f, t_m)_H + (t_m, t_m)_H + \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 \\
&= \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^{m} c_k \bar{\alpha}_k + \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2} \\
&= \underbrace{\|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2} + \sum_{k=1}^{m} |c_k - \alpha_k|^2 \\
&= \|f - s_m\|_H^2 + \sum_{k=1}^{m} |c_k - \alpha_k|^2 .
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme využili ortonormalitu systému $\{\phi_k\}_{k=1}^{m}$ pro $m \in \mathbb{N}$ libovolné. Vztah (*) implikuje jak 1) tak 2). ∎

Definice Píšeme-li $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$, pak $c_k := (f, \phi_k)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ se nazývá abstraktní Fourierova řada prvku $f \in H$ vzhledem k ortonormálnímu systému $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Koeficienty c_k se nazývají Fourierovy koeficienty

Příklad Buď $H = L^2((0,2\pi))$, $(f,g)_{L^2((0,2\pi))} := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ a $\{\phi^m\}_{m=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$. (Již víme, že $\{\phi^m\}$ je ortonormální systém v $L^2((0,2\pi))$.) Pak pro $f \in L^2((0,2\pi))$ dle předchozí definice máme

$$f \sim \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},$$

kde

$$\tilde{a}_0 = \int_0^{2\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dt, \quad \tilde{a}_k = \int_0^{2\pi} f(t)\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\,dt, \quad \tilde{b}_k = \int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\,dt \quad (k \in \mathbb{N})$$

NEBO ČASTĚJI (přeuspořádání násobků):

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

kde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt \quad (k = 0,1,\dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt \quad (\text{—}\|\text{—}).$$

Tento zápis Fourierovy řady f má tu výhodu, že vzoreček pro a_0 a a_k s $k \in \mathbb{N}$ je „stejný". Abych měl jeden vzoreček pro a_k, $k = 0,1,2,\dots$, tak jsem musel první koeficient v Four. řadě dělit 2.

7.1.3 Vlastnosti Fourierových koeficientů

Věta 7.2 (Besselova nerovnost a Parsevalova rovnost)

Buď $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ Hilbertův s ortonormálním systémem $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Buď $f\in H$ a $f\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k\phi_k$. Potom platí:

Besselova nerovnost

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\infty$ a platí $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\le\|f\|_H^2}$

Parsevalova rovnost

(ii) $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\|f\|_H^2}\iff\lim_{n\to\infty}\|f-s_n\|_H=0$, kde $s_n:=\sum_{k=1}^{n}c_k\phi_k$

Dk Ad (i) Plyne z ortonormality $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ a z identity

$$\boxed{0\le\|f-s_n\|_H^2=\|f\|_H^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2}$$

kterou odvodíme dosazováním, pro $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\le\|f\|_H^2$, což implikuje obě tvrzení v (i).

Ad (ii) Identita v rámečku, tj. $\|f-s_n\|_H^2=\|f\|_H^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$ dává ekvivalenci. ▨

Důsledek Z (i) a z teorie číselných řad plyne, že $c_k\to0$ $(k\to\infty)$.
Volíme-li speciálně $\{\phi_l\}_{l=1}^{\infty}=\{e^{ilx}\}_{l=1}^{\infty}$ tak pro $f\in L^2((0,2\pi))$

$$c_n=\int_0^{2\pi}f(t)e^{int}\,dt\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad\text{neboli}\quad \int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\,dt\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad\text{a}\quad \int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\,dt\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

což je speciální případ tzv. Riemann-Lebesgueova lemmatu, které budeme mít později.

Pozorování! Parsevalovu rovnost lze psát také ve tvaru

$$\|f\|_H^2=\|\mathbf{c}\|_{l^2}^2 \quad\text{kde}\quad \mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3,\dots,c_k,\dots)\in l_2,$$

což indikuje, že každý (separabilní) Hilbertův prostor H bude možné ztotožnit s prostorem l_2. V tomto smyslu je $L^2((0,2\pi))$ totéž co l_2. Viz Věta 7.6 dále.

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.3 (Obrácení věty 7.2 – Riesz-Fischerova věta #2)

Buď $(H, (\cdot,\cdot))$ Hilbertův*) s ortonormálním systémem $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Nechť $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$ (tj. $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$). Pak $\exists f \in H$ tak, že

(i) $c_k = (f, \phi_k)$

(ii) $\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$

Dk) Chceme ukázat, že $\forall c \in l_2$ $\exists f \in H$ tak, že $c_k = (f, \phi_k)$ a platí $\|f - s_n\|_H^2 \to 0$ kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$.

Avšak

- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je pro $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$ cauchyovská neboť pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ existuje dostatečně velké n tak, (že pro) libovolné $p \in \mathbb{N}$ je

$$\|s_{n+p} - s_n\|_H^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \phi_k\Big\|_H^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2 < \varepsilon$$

Protože H je úplný, tak $\exists f \in H$ tak, že $s_n \to f$ v H, což je část tvrz., kterou jsme chtěli ukázat. Zbývá ověřit, že

$c_k = (f, \phi_k)$.

Avšak

$$|c_k - (f, \phi_k)| = |(s_n, \phi_k) - (f, \phi_k)| \leq |(s_n - f, \phi_k)|$$

$$\leq \|s_n - f\|_H \|\phi_k\|_H = \|s_n - f\|_H \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Cauchy-Schwarz-Bunjakovski   ortonormalita ϕ_k

Tedy $c_k = (f, \phi_k)$. $\boxed{\text{k}}$

---

*) Úplnost Hilbertova prostoru je pro platnost tvrz. podstatná. Riesz-Fischerova věta #1 nám říká, že prostor $L^2(\Omega)$ je úplný. (V poznámkách také najdete, že $L^2(\Omega)$ je separabilní.)
Tedy dle Věty 7.3 a Věty 7.2 existuje úzká souvislost mezi separabilními Hilbertovými prostory a prostorem l_2.

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.4 (Charakterizace úplnosti $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$)

Buď $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ Hilbertův s ortonormálním systémem $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný

(ii) $(\forall f \in H)$ $\|f - s_n\|_H \to 0$ $\left(\text{kde } s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k = \sum_{k=1}^{n} (f, \phi_k)_H \phi_k\right)$

(iii) $(\forall f \in H)$ $\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$

(iv) $\operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$ libovolné je hustý v H.

Dk $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ $f \in H$ dáno (libovolné, ale pevné). Pak pro $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$, kde $c_k := (f, \phi_k)$ dle Věty 7.2(i) platí, že $\sum |c_k|^2 < \infty$ a tedy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Existuje tedy $z \in H$ tak, že $s_n \to z$ v H. Navíc

$$(z, \phi_k) = \lim_{n\to\infty} (s_n, \phi_k) = c_k = (f, \phi_k). \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tedy $(z - f, \phi_k) = 0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ a z předpokladu úplnosti $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ plyne $z - f = 0 \Leftrightarrow z = f$. Tedy $\|s_n - f\|_H \to 0$.

$\boxed{(ii) \Leftrightarrow (iii)}$ plyne z Věty 7.2 (ii).

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iv)}$ plyne z definice "hustý" a (ii)

$\boxed{(iv) \Rightarrow (i)}$ Předpokládáme, že $z \in H$ splňuje $(z, \phi_k) = 0$ a chceme ukázat, že $z = 0$. Dle předpokladu existuje $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $t_n \in \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ a

$$t_n \to z \text{ v } H.$$

Pak však

$$\|z\|_H^2 = (z, z) = \left(\lim_{n\to\infty} t_n, z\right) = \lim_{n\to\infty} (t_n, z) = 0$$

dle předpokladu (neboť $(z, \phi_k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.)

(

▨

Implikace $\boxed{(i) \Rightarrow (iv)}$ předchozí věty dává tvrzení cenné zaznamenání.

$\boxed{\text{Důsledek Věty 7.4}}$ Každý Hilbertův prostor, ve kterém existuje úplný ortonormální systém, je separabilní.

Platí obrácené tvrzení:

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.5 V každém separabilním Hilbertově prostoru H existuje úplný ortonormální systém

(Dk) Je založen na dvou krocích

krok 1) Uvažme hustou spočetnou část, která dle separability prostoru H existuje, a označme ji $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

krok 2) Provedeme Gramm-Schmidtův ortonormalizační proces s mezikrokem, kdy do procesu přidáme jen ta ψ_k, která budou lineárně nezávislá na již nalezených $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$.

Přesněji:
- vezmi ψ_1 a definuj $\phi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|_H}$
- Podívej se, zda ψ_2 je LN s ϕ_1. Pokud ne, podívej se, zda ψ_3 je LN s ϕ_1 (a ψ_2 zahoď),

  Pokud ano, hledej ϕ_2 ve tvaru $\phi_2 = \psi_2 - \alpha\phi_1$, kde α urči tak, aby

  $$(\phi_2, \phi_1)_H = 0 \quad \text{a} \quad \|\phi_2\|_H = 1,$$

  což dává

  $$\phi_2 = \frac{\psi_2 - (\psi_2, \phi_1)_H \phi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \phi_1)\phi_1\|_H}$$
- ...

viz podrobněji Černý, Pokorný - MAF IV. ▨

7/11

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.6 Každý separabilní Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ je isometrický s prostorem l_2.

Připomeň: Dva metrické prostory jsou isometrické, pokud existuje isometrie, zobrazující prostory na sebe (isometrie je zobrazení jednoho prostoru na druhý zachovávající metriku).

V našem případě Hilbertových prostorů je metrika daná normou (generovanou skalárním součinem).

Hledáme tedy zobrazení mezi H a l_2. Avšak H je separabilní a dle Věty 7.5 v něm existuje úplný ortonormální systém $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Uvažme zobrazení $I : H \to l_2$.

$$f \longmapsto c = (c_1, \dots, c_k, \dots)$$
$$c_k := (f, \varphi_k)$$

a dle Věty 7.4, (i)$\Leftrightarrow$(iii):

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|c\|_{l_2}^2 \stackrel{*}{=} \|If\|_{l_2}^2,$$

což jsme chtěli ukázat. ◁

$\boxed{7.1.4}$ Uzavřené podprostory Hilbertova prostoru. Projekce.

Připomeňme si situaci z kapitoly 7.1.1. Pro $f \in H$, kde H je nekonečně-dimensionální Hilbertův prostor s ortonormálním systémem $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, jsme hledali $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$ tak, že $\|f - s_n\|_H \le \|f - t_n\|_H$ kde $t_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k$.
Zjistili jsme, že $c_k = (f, \phi_k)$ je nejlepší volba.

Označme nyní $H_n := \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Pak $\boxed{\dim H_n = n < +\infty}$.

Definujme neboli $P : H \to H_n$ předpisem $P(f) = s_n$,

$$f \longmapsto s_n^f := \sum_{k=1}^{n} (f, \phi_k)_H \phi_k$$

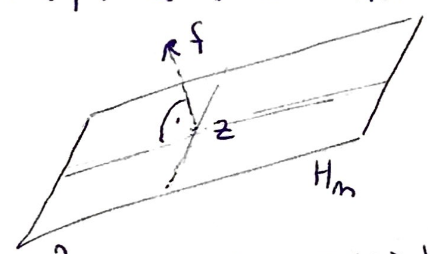
Zobrazení P se nazývá projekce. Není těžké nahlédnout (ověřte si sami), že P má tyto vlastnosti:

(1) $P(H) = H_n$

(2) $P^2 = P$ (této vlastnosti se říká IDEMPOTENCE)

(3) $z = P(f) \iff z \in H_n$ a $(f - z, y) = 0 \quad \forall y \in H_n$

ORTOGONALITA



(4) $\|f\|_H^2 = \|f - P(f)\|_H^2 + \|P(f)\|_H^2$
(Pythagorova věta)

Také pozorujeme, že H_n má tyto vlastnosti (OPĚT OVĚŘTE!):

H_n je PODPROSTOR { (i) $H_n \subset H$
(ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in H_n \Rightarrow \alpha f + \beta g \in H_n$

H_n je UZAVŘENÝ { (iii) $f^n \in H_n$ a $f^n \to f$ v $H \Rightarrow f \in H_n$

Nyní si ukážeme, že existují podprostory nekonečné dimenze (některé uzavřené jiné nejsou naopak uzavřené), a pokud jsou uzavřené pak existují jednoznačně definované projekce, které splňují výše uvedené vlastnosti (1)–(4).
(H má uzavř. podprostory)

$\boxed{\text{Def. (uzavřeného podprostoru)}}$ Řekneme, že M je uzavřený podprostor v H $\equiv$
$\boxed{M \subset\subset H}$ symbolicky

$$\begin{cases} (\alpha) & M \subset H \\ \text{LINEARITA} \quad (\beta) & (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C})(\forall u, v \in M)(\alpha u + \beta v \in M) \\ \text{UZAVŘENOST} \quad (\gamma) & \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \text{ a } u_n \to u \text{ v } H \Rightarrow u \in M \end{cases}$$

Příklad (uzavřeného podprostoru nekonečné dimenze). Buď $H = L^2(\Omega)$. Definujme $M := \{u \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega u\,dx = 0\}$. Předpokládáme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená, otevřená!

Ověřte si, že takto definované M je lineární prostor (splňuje (α) a (β)). Navíc $M \subsetneqq H$ (neboť existují L^2-integrovatelné funkce s nenulovým průměrem) a $\dim M = \infty$ (neboť podmínka na nulový průměr je podmínka jiné normalizace. Lze si tedy představit, že k libovolnému spočetnému systému $\{\psi_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ lze sestrojit systém $\{\tilde{\psi}_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subset M$ a to tak, že

$$\tilde{\psi}_\ell := \psi_\ell - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \psi_\ell . \quad \left(\Rightarrow \int_\Omega \tilde{\psi}_\ell = 0\right)$$

Zbývá ověřit uzavřenost. Pokud $\{u^n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ a $u^n \to u$ v $L^2(\Omega)$ pak $u \in L^2(\Omega)$ a $\int u(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int u^n(x)\,dx = 0$

neboť

$$\left|\int_\Omega u\,dx\right| = \left|\int_\Omega (u^n - u)\,dx\right| \le \int |u^n - u|\,dx \le \|u^n - u\|_2 |\Omega|^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Hölder

Příklad (ukazující, že existují podprostory ∞-dimenze, které nejsou uzavřené.)

Definujme

$$M := \{\mathbf{c} \in l_2;\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } c_n = 0 \text{ pro každé } n > n_0\}.$$

Pak M je lineární podprostor v l_2, ale není uzavřený neboť

$$\mathbf{c}_1 := \{1, 0, 0, \dots\} \in M$$
$$\mathbf{c}_2 := \{1, \tfrac{1}{2}, \dots\} \in M$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{c}_n := \{1, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \dots\} \in M$$

, ale $\lim_{n\to\infty} \mathbf{c}_n = \underbrace{\left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1}, \dots\right)}_{= \mathbf{c}} \in l_2 \setminus M$.

tedy $\mathbf{c}_n \to \mathbf{c}$ v l_2

ale $\mathbf{c} \notin M$.

$\boxed{\text{Věta 7.7}}$ (O ortogonální projekci H na uzavřený podprostor)

Buď H Hilbertův a $M \subset\subset H$ uzavřený podprostor. Potom

$$(\forall f \in H)(\exists!\, f_M \in M)\ \|f - f_M\|_H = \inf_{z \in M} \|f - z\|_H .$$

Navíc, zobrazení $P : H \to M$ definované předpisem $P(f) = f_M$ splňuje:
(1) $P(H) = M$
(2) $P^2 = P$
(3) $z = P(f) \iff z \in M$ a $(f - z, y) = 0$ pro $\forall y \in M$
(4) $\|f\|_H^2 = \|f - P(f)\|_H^2 + \|P(f)\|_H^2$ $(\forall f \in H)$.

Dk $\boxed{\text{[1] Konstrukce (existence) } f_M}$ Buď $\delta = \inf_{z \in M} \|f - z\|_H$ pro dané (libovolné) $f \in H$. Z definice infima plyne existence $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ tak, že $\|f - z_n\|_H \to \delta$ $(n \to \infty)$.
Protože $\|z_n - z_m\|_H = \|z_n - f + f - z_m\|_H \le \varepsilon$, neboť $\{f - z_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchy, tak existuje $z^* \in H$ tak, že $z_n \to z^*$ v H, ale M je uzavřený tak, že $z^* \in M$. Navíc $\|f - z_m\|_H \to \|f - z^*\|_H$. Tedy $\|f - z^*\|_H = \delta$.
Hledané $\boxed{f_M = z^*.}$ a $P : f \mapsto f_M$.

$\boxed{\text{[2] Vlastnosti (1)–(4)}}$ Vlastnosti (1), (2) rozmyslete sami.
Ověříme (3) $\boxed{\Rightarrow}$ Je-li $z = P(f)$, pak určitě $z \in M$. Navíc pro $y \in M$ libovolné a $\alpha \in \mathbb{R}$ libovolné definujme

$\phi(\alpha) := \|f - (z + \alpha y)\|_H^2$. Víme, že ϕ nabývá v $\alpha = 0$ minima. Protože

$$\phi(\alpha) = \|f - z\|_H^2 + 2\alpha (f - z, y) + \alpha^2 \|y\|_H^2 ,$$

tak podmínka $\phi'(\alpha) = 0$ implikuje $(f - z, y) = 0$, což jsme chtěli ověřit.

$\boxed{\Leftarrow}$ Naopak, buď $z \in M$ takové, že $(f - z, y) = 0$ $\forall y \in M$.
Buď $\tilde{y} \in M$ libovolné. Pak

$$\|f - \tilde{y}\|_H^2 = \|f - z + z - \tilde{y}\|_H^2 = \|f - z\|_H^2 + \|z - \tilde{y}\|_H^2 \ge \|f - z\|_H^2$$

tedy $z = f_M = P(f)$.

$\boxed{\text{[3] Jednoznačnost}}$ Nechť existuje $f \in H$ tak, že f_M^1 a f_M^2 minimalizují vzdálenost a $f_M^1 \ne f_M^2$. ($\|f - f_M^1\|_H = \|f - f_M^2\|_H$)
Pak $\left.\begin{array}{l}(f - f_M^1, y) = 0 \ \forall y \in M \\ (f - f_M^2, y) = 0 \ \forall y \in M\end{array}\right\}$ a tedy $(f_M^1 - f_M^2, y) = 0$ $\forall y \in M$

Volbou $y = f_M^1 - f_M^2$, dostáváme $\|f_M^1 - f_M^2\|_H^2 = 0$

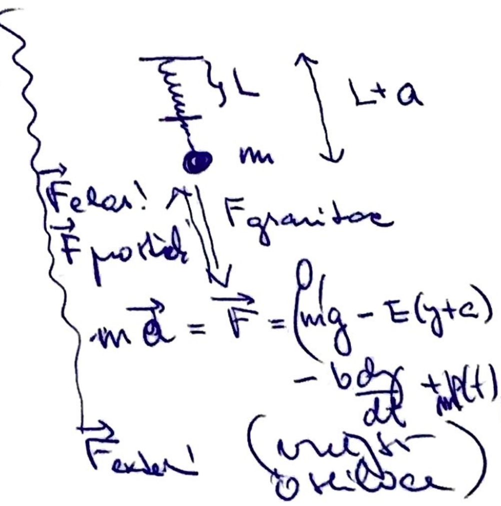
což je $\lightning$ s $f_M^1 \ne f_M^2$ $\square$

$\boxed{7.1.5.}$ Fourierovy řady a analýza periodických vibrací *)

V této kapitole se pokusíme odpovědět na otázku proč jsou Fourierovy řady tak důležité v mnoha odvětvích jako jsou např. vedení tepla, vibrace tyčí, membrán a mechanických systémů, elektrické obvody atd. Důvodem je, že základním matematickým modelem ve všech těchto situacích je rovnice ve (nejprve redukovaná, přesto postačující) tvaru

$$(R) \qquad y'' + \alpha y' + \varkappa^2 y = p(t).$$

NAPŘ. V mechanice (R) popisuje kmitající pružinu s $m = 1$ či $\varkappa^2 = \frac{E}{m}$, $\alpha = \frac{b}{m} > 0$



Rce (R) je • lineární a • má neměnné vlastnosti ($\alpha, \varkappa$) se nemění s časem

Za těchto dvou podmínek lze využít Fourierovy řady (Fourierovu analýzu).

$p(t)$ ... vstup $\qquad y(t)$ ... řešení (výstup)

Dvě základní vlastnosti (R) lze v naší situaci testovat následujícím experimentem: Uvažujme p ve tvaru

$$p(t) = A \sin \omega t \quad \text{nebo} \quad p(t) = A e^{i\omega t}$$

(jak ODR (R) čistí mezi dva pohledy: reálná část + imag. část)

Hledejme řešení ve tvaru $y(t) = Be^{i\omega t}$.
Po dosazení $B(\varkappa^2 - \omega^2 + i\alpha\omega) = A$, což implikuje

$$B = A\frac{(\varkappa^2-\omega^2) - i\alpha\omega}{(\varkappa^2-\omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} = ACe^{-i\phi} \quad \text{(zápis v polárním tvaru)}$$

kde $C = \dfrac{1}{\sqrt{(\varkappa^2-\omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}}$ a $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{\alpha\omega}{\varkappa^2-\omega^2}$.

---

*) dle knihy: „Cornelius Lanczos: Discourse on Fourier series“

Tedy v uvažovaném případě:

(K) $\boxed{\text{VSTUP } p(t) = A \sin \omega t \quad \text{vyplivuje VÝSTUP } y(t) = AC \sin(\omega t - \phi)}$

Potvrujeme, že „výstup k sinusoidálnímu vstupu je opět sinusoidální se stejnou frekvencí, ale modifikovanou amplitudou a modifikovanou fází."

Skutečnost, že frekvence zůstane stejná plyne z linearity a koeficienty α a k v (R) konstantní. Pokud jedna z těchto podmínek neplatí, neplatí ani vztah (K).

Nabízí se otázka: Je vlastnost (K) rovnice (R) důležitá?

Nyní přichází význam Fourierova objevu:

Uvažujme $p = p(t)$ na intervalu $(0, T)$. Pak „Fourierova teorie" říká, že

$$p(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Tedy stačí znát výstupy pro speciální vstupní funkce $e^{ik\omega t}$.

Samozřejmě je však třeba znát $a_0, a_1, a_2, \dots$
$b_1, b_2, \dots$)

což Fourier udělal:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos k\omega t \, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin k\omega t \, dt.$$

$\boxed{7.2}$ BODOVÁ KONVERGENCE FOURIEROVÝCH ŘAD

Z abstraktní teorie Fourierových řad víme, že pro $f \in L^2((0,2\pi))$, 2π-periodickou platí:

(1) $$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \text{ kde } \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt$$

Obdobně pro $f \in L^2((a,a+l))$, l-periodickou máme

(1') $$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi k}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{2\pi k}{l}x, \text{ kde } \quad a_k = \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(t)\cos\frac{2\pi k}{l}t\,dt, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(t)\sin\frac{2\pi k}{l}t\,dt$$

*) V minulé přednášce jsme naznačili jeden z přístupů, jak ukázat úplnost ortonormálního systému
$$\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{v} \quad L^2((0,2\pi)).$$

<u>Pokud tedy víme, že</u> $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ je <u>úplný ortonormální systém v $L^2((0,2\pi))$</u>, <u>pak</u> dle Věty 7.4 máme:

(a) Vlnovku "$\sim$" lze ve výrazu (1) "$=$ s.v. v $(0,2\pi)$"

tj. rovnost skoro všude v $(0,2\pi)$.

(b) Parsevalovu rovnost, která říká, že (srovnej s Příkladem na straně 7/6)
$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{a}_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{b}_k|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

(c) existenci vybrané podposloupnosti $\{S_{m_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{S_n\}$ takové, že

(2) $$S_{m_j} \to f \quad \text{s.v. v } (0,2\pi)$$

(plyne z první Riesz-Fischerovy věty a z Věty 7.4(iii)).

*) Není součástí tohoto požadavku.

Vlastnost (2) se dá v případě Fourierových řad zesílit. Platí totiž Carlesonova*) věta:

Pro $\forall f \in L^2((0,2\pi))$: $\quad s_n(x) \to f(x)$ pro s.v. $x \in (0,2\pi)$

Tedy nejen vybraná, ale celá posloupnost $\{s_n\}$ konvergují ve skoro všech bodech k f; (je-li $f \in L^2((0,2\pi))$).

Protože jsem vás musel nepřesvědčil (vzhledem k nemožnosti dokázat na daném stupni našich znalostí všechna podstatná tvrzení), pokusíme se dnes ukázat úplnost systému $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ v $L^2((0,2\pi))$ jinak, a to pomocí ekvivalence (iv) a (i) ve Větě 7.4.

Ještě dříve si však dokážeme dvě tvrzení, která jsou na úplnosti systému $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ založena a která se nejčastěji hodí pro počítání Fourierových řad a ověření jejich konvergenčních vlastností.

Věta 7.7 (1) Nechť f je 2π-periodická, spojitá funkce, která je po částech spojitě diferencovatelná (tzn. $\exists$ konečné $\{a_i\}_{i=0}^m$ taková, že $0=a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = 2\pi$ a $f' \in C((a_i, a_{i+1}))$ pro každé $i = 0, \dots, m-1$ a f' má v a_i vlastní jednostranné limity). Potom

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty$
- $s_n \rightrightarrows f$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$ $\quad \left(s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$

---

*) Lenart CARLESON 1966, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math. 116, pp. 135–157.

(2) Buď f 2π-periodická, $f \in C^k(\mathbb{R})$ a $f^{(k+1)}$ po částech spojitě diferencovatelná. Potom

- $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m^s \left(|a_m| + |b_m|\right) < +\infty$ pro $s = 0, 1, \dots, k$
- Fourierovu řadu lze k-krát derivovat člen po členu a tyto řady konvergují k $f^{(s)}$ stejnoměrně pro $s = 0, 1, \dots, k$.

Dk **Ad (1)** Vlastnosti f a f' implikují, že $f, f' \in L^2((0, 2\pi))$. ROZMYSLETE PROČ. Dle Besselovy nerovnosti (viz Věta 7.2) Fourierovy koeficienty odpovídající jak f tak f' jsou sčítatelné s druhou mocninou. Symbolicky, pokud

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

a

$$f' \sim \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum \tilde{a}_k \cos lx + \tilde{b}_k \sin kx,$$

tak $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 < \infty$ a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{a}_k|^2 + |\tilde{b}_k|^2 < +\infty$.

Dále, integrací per-partes dostáváme:

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \underset{\downarrow\, f'}{f(t)}\, \underset{\downarrow\, \frac{\sin kt}{k}}{\cos kt} \, dt$$

$$\overset{\text{per partes}}{=} \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{\left[f(t)\frac{\sin kt}{k}\right]_{a_i}^{a_{i+1}}}_{=\,0 \text{ neboť } f \text{ je spojitá a } 2\pi\text{-periodická}} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t) \frac{\sin kt}{k} \, dt$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} f'(t) \sin kt \, dt = \boxed{-\frac{\tilde{b}_k}{k}}$$

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underset{\downarrow\, f'(t)}{f(t)}\, \underset{\downarrow\, -\frac{\cos kt}{k}}{\sin kt} \, dt = \frac{1}{\pi k}\int_0^{2\pi} f'(t) \cos kt \, dt = \frac{\tilde{a}_k}{k}}$$

S použitím odvozených nahoře dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|\tilde{b}_k| + \frac{1}{k}|\tilde{a}_k| \underset{\text{ROZMYSLI}}{\overset{\text{Hölder}}{\leq}}$$

$$\leq 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{b}_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{a}_k|^2\right)^{1/2}\right]$$

Tak je dokázána první část.

Uvažujme nyní s_m (definované v znění věty). Pak

$$|s_m| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{m} |a_k| + \sum_{k=1}^{m} |b_k| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty$$

$|\cos| \leq 1$

$|\sin| \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$

dle právě dokázaného

Tedy dle Weierstrassovy věty:

$$s_m \rightrightarrows f^* \text{ v } \mathbb{R}. \text{ i v } [0, 2\pi].$$

tzn.

$$\| s_m - f^* \|_\infty \to 0,$$

což implikuje

$$\| s_m - f^* \|_2 \to 0$$

(Připomeň: $\|z\|^2_{L^2(0,2\pi)} \leq \|z\|^2_{L^\infty(0,2\pi)} 2\pi$)

Dle Věty 7.4 však (ZDE VYUŽÍVÁME ÚPLNOST $\{1, \cos kx, \sin kx\}$)

$$\| s_m - f \|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

tedy $f = f^*$ s.v.

Navíc $f, f^* \in C(\mathbb{R})$, tedy $f = f^*$ bodově. (Kdyby se lišily v jednom bodě, pak se musí lišit na okolí.)

Tedy $\| s_m - f \|_2 \to 0$ a $s_m \rightrightarrows f$ v $[0, 2\pi]$

a první část věty je dokázána.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Pro $k=0$ je tvrzení dokázáno v první části.

Je-li $k=1$, postupujeme analogicky. Provedeme-li per-partes 2x dostaneme

$$a_k = -\frac{\tilde{b}_k}{k^2} \quad \text{a} \quad b_k = -\frac{\tilde{a}_k}{k^2},$$

kde $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ označují Fourierovy koeficienty k fci f''.

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|a_n|+|b_n|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(|\tilde{a}_n| + |\tilde{b}_n|\right) \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{a}_n|^2 + |\tilde{b}_n|^2\right)^{1/2} < +\infty.$$

ZBYTEK DŮKAZU JE PONECHÁN LASKAVÉMU ČTENÁŘI. ◿

Důležitá je následující věta, ve které oslabíme požadavek na spojitost f v celém $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Věta}}\boxed{7.8}$ Buď f 2π-periodická, po částech spojitá a spojitě diferencovatelná. Potom

$$s_n^f(x) \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}$$

Je-li navíc f spojitá na (A,B), pak $s_n^f \rightrightarrows f$ v $\langle \alpha,\beta\rangle \subset (A,B)$.

Důkaz provedeme za speciální situace*), kdy bod nespojitosti je jen jeden. Nejdříve uvažujme, že bod nespojitosti je $x=0$ a singularita je odstranitelná, tzn. $f \in C([-\pi,\pi]\setminus\{0\})$, 2π-periodická, a

$$\lim_{x\to 0+} f(x) =: f(0+) = f(0-) := \lim_{x\to 0-} f(x)$$

Definujme

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ f(0+) & x = 0 \end{cases} . \text{ Pak } \tilde{f} \in C([-\pi,\pi])$$

a dle Věty 7.7. $s_n^{\tilde{f}}$, které se dle definice rovná s_n^f, splňuje

$$s_n^f = s_n^{\tilde{f}} \rightrightarrows \tilde{f} \text{ v } [-\pi,\pi], \text{ což dokazuje tvrzení.}$$

Dále, nechť $x=0$ je jediný bod nespojitosti a $\boxed{f(0+) \neq f(0-).}$

Položme $\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{2}\left(f(0+)-f(0-)\right) \operatorname{sgn} x$

Pak $\tilde{f}(0+) = \lim_{x\to 0+} \tilde{f}(x) = \frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \lim_{x\to 0-} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0-)$

Tedy $\tilde{f}$ má v 0 odstranitelnou singularitu a platí tedy

$$s_n^{\tilde{f}}(0) \to \frac{\tilde{f}(0+)+\tilde{f}(0-)}{2} = \frac{f(0+)+f(0-)}{2}.$$

Nakonec, je-li x bod nespojitosti libovolný, pak položme $g(s) = f(x+s)$. Potom $s_n^f(x) = s_n^g(0) \to \frac{g(0+)+g(0-)}{2} = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

∎

---

*) Tato situace stačí pro praktické použití.

Příklad Uvažte fci $\operatorname{sgn} x\big|_{(-\pi,\pi)}$. ① Najděte její Fourierovu řadu, ② rozhodněte, ve kterých bodech se F. řada rovná sgn x a pomocí tohoto rozvoje určete součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Řešení $\boxed{\text{Ad ①}}$ $\operatorname{sgn} x\big|_{(-\pi,\pi)} \in L^2((-\pi,\pi))$, lichá. Rozšíříme-li tuto funkci periodicky na $\mathbb{R}$, viz obrázek, pak pro tuto funkci sgn_{per} platí:

$$\operatorname{sgn}_{per} \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad \text{kde } b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} t\big|_{(-\pi,\pi)} \sin kt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \, dt = \begin{cases} 0 & k \text{ sudé} \\ \frac{4}{\pi k} & k \text{ liché} \end{cases}$$

Pozoruj, že $a_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ neb sgn_{per} je liché.

Tedy
$$\operatorname{sgn}_{per} \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \underbrace{\frac{\sin(2k+1)x}{\sqrt{\pi}}}_{\text{prvek ortonormálního systému}}$$

$\boxed{\text{Ad ②}}$ Dle předchozí věty platí

$$\operatorname{sgn} x\big|_{(-\pi,\pi)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \frac{\sin(2k+1)x}{\sqrt{\pi}} \quad \text{pro } \forall x \in (-\pi,\pi).$$

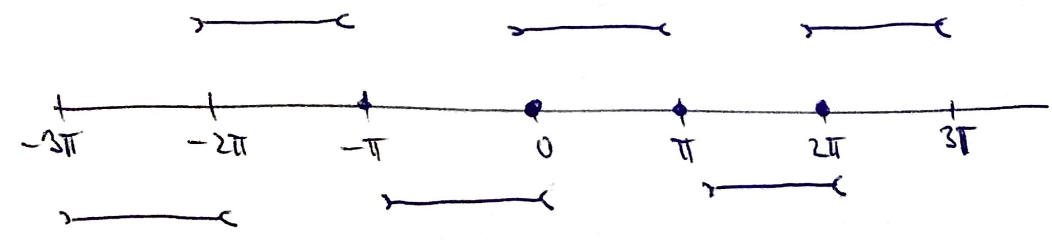
neboť $\operatorname{sgn} 0 = 0 = \frac{\operatorname{sgn}(0+) + \operatorname{sgn}(0-)}{2}$.

nebo $\boxed{\operatorname{sgn}_{per}(x) = \qquad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Ad ③}}$ Parsevalova rovnost

$$2\pi = \left\| \operatorname{sgn}\big|_{(-\pi,\pi)} \right\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Tedy
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$



obrázek.

Věta 7.9 (o integraci Fourierových řad člen po členu)

Buď f 2π-periodická, po částech spojitá s Fourierovými koeficienty a_k, b_k.

Pak $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x$ je 2π-periodická po částech spojitě diferencovatelná

a $\bar{s}_n \rightrightarrows F$ stejnoměrně v $\langle 0, 2\pi)$,

přičemž
$$\bar{s}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^x \cos kt\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^x \sin kt\,dt$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\left[\cos kx - 1\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-b_k}{k}\right) \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k}\right) \sin kx .$$

neboli $\bar{s}_n$ je řada, která vznikla integrací F.ř. funkce f člen po členu.

Dk: Skutečnost, že $F \in C(\mathbb{R})$ a po částech C^1 víme ze mateřské školy (viz základní věta dif. a int. počtu). Protože $F(x+2\pi) = F(x)$ (pro $\forall x$) (ověř!), tak F je 2π-periodická. Dle Věty 7.7

tedy $s_n^F \rightrightarrows F$ v $\langle 0, 2\pi)$, kde $F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$

a $A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \cos kt\,dt$

a $B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \sin kt\,dt$.

Dle "per-partes" v důkazu Věty 7.7 (1):
$$A_k = -\frac{1}{k} b_k \quad \text{a} \quad B_k = \frac{1}{k} a_k$$

Tedy
$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k}\right) \cos kx + \left(\frac{a_k}{k}\right) \sin kx .$$

Z toho $F(0) = 0$, proto $\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ a tvrzení je dokázáno.

Nyní se vrátíme k otázce úplnosti systému $\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ resp. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ v prostoru $L^2((-\pi,\pi))$.
Nemůžeme využít předchozích vět 7.7–7.9, které byly na úplnost ortogonálních systémů Kaloty.

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.10 Systémy $\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ jsou úplné ortonormální systémy v $L^2((-\pi,\pi))$.

Dk: každou funkci z $L^2(\Omega)$ lze libovolně dobře aproximovat funkcemi z $C^1(\Omega)$ (nebo i hladšími). Tedy: dle Besselovy nerovnosti (Věta 7.2) k takovéto fci $f\in C^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, $\Omega=(-\pi,\pi)$

$$s_m^f=\sum_{k=1}^{m}(f,\phi_k)\phi_k \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{m}|(f,\phi_k)|^2\le\|f\|_2^2 \quad \text{a} \quad \|s_m^f-s_n^f\|_2^2\le\sum_{|k|>m}|(f,\phi_k)|^2\to 0$$

Tedy s_m^f je Cauchy a $\exists f^*$: $s_{m_k}^f\to f^*$ s.v. v Ω a $\|s_k^f-f^*\|_2\to 0$.
Dle následující věty 7.11 a následného komentáře,

$$s_m^f\to f \text{ s.v. v } \Omega,$$

tedy $f=f^*$ a $\|s_m^f-f\|_2\to 0$ pro $m\to\infty$.

Tedy dle Věty 7.4 ; (i) $\Leftrightarrow$ (iii) oba systémy jsou úplné.

$\boxed{\text{Q.E.D.}}$

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.11 Buď $f\in L^2_{per}((-\pi,\pi))$ a existují M a $\alpha>0$ taková, že

(L) $$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\le M \quad (\forall |h|\le\alpha)\ (\forall x\in(-\pi,\pi))$$

Pak $S_m^f\to f$ s.v. v $(-\pi,\pi)$.

Poznámka: (L) např. platí pokud $f\in C^1(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Důkaz}}$ (Věta 7.11) Protože $\{\phi_k\}$ jsou ortonormální a ϕ_0 konstantní, tak platí

$$f(x) = \sum_{|k|\le n} (f(x), \phi_k)\, \phi_k .$$

Rovněž platí:

$$s_n^f(x) - f(x) = \sum_{|k|\le n} (f - f(x), \phi_k)\, \phi_k$$

$$= \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(y) - f(x)\big) e^{-iky}\, dy \; e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(y) - f(x)\big) \sum_{|k|\le n} e^{ik(x-y)}\, dy$$

periodicita

$$\underset{\substack{z = x-y \\ dz = -dy}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-z) - f(x)\big) \sum_{|k|\le n} e^{ikz}\, dz$$

Protože

$$\sum_{|k|\le n} e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx}\, \frac{1 - e^{ix(2n+1)}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{ix(n+\frac12)} - e^{-ix(n+\frac12)}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\sin (2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

tak

$$s_n^f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-z) - f(x)}{\sin\frac{z}{2}} \sin (2n+1)\frac{z}{2}\, dz$$

$$\underset{\substack{z = 2y \\ dz = 2dy}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(x-2y) - f(x)}{2y}\, \frac{2y}{\sin y}\, \sin (2n+1) y\, dy$$

Tedy $s_n^f(x) - f(x)$ lze pohlížet jako $(2n+1)$-ní koeficient Fourierovy řady fce $g(y) = \frac{f(x-2y) - f(x)}{2y}\, \frac{2y}{\sin y}\, \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}$, která padá do $L^2((-\pi,\pi))$ a dle Besselovy nerovnosti (Věta 7.2)

$$(g, \phi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Tedy $s_n^f(x) - f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ všude v $\mathbb{R}$. ∎

Závěrečné poznámky, Gibbsův jev a integrální reprezentace S_m^f

Fourierovy řady dané vztahy (1) resp. (1') mají smysl také pro $f \in L^1((0,2\pi))$ resp. $f \in L^1((a,a+l))$.

Připomeň, že $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ pro $\forall\, \Omega \subset \mathbb{R}^d$ omez.

Matematická komunita se zabývala otázkou bodové konvergence F. řad pro $f \in L^1((0,2\pi))$. Výsledky jsou pozoruhodné:

(1) $\exists f \in L^1((-\pi,\pi))$ tak, že F. řada f diverguje pro $\forall x \in (-\pi,\pi)$.

(2) $\exists$ spojitá funkce $\in L^1(-\pi,\pi)$ tak, že F. ř. diverguje na husté podmnožině v $(-\pi,\pi)$.

(3) Je-li $f \in L^1((0,2\pi))$, 2π-periodická.
Pro $x \in \langle 0,2\pi)$ označme

$$g(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \quad \text{a} \quad s(x) = \lim_{t\to 0+} g(t) \text{ pokud tato limita existuje}$$

Platí:

JORDANOVO KRITÉRIUM: (a) Je-li f funkce s omezenou variací na $\langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle$
(tzn. $\exists M>0$ $\sup_D \sum_{i=1}^{N_D} |f(x_i)-f(x_{i-1})| \le M$)
pro jisté $\delta>0$. Pak
- $s(x)$ existuje
- F. ř. konverguje k $s(x)$

DINIHO KRITÉRIUM: (b) Jestliže $s(x)$ existuje a $\int_0^\delta \frac{g(t)-s(x)}{t}\,dt < +\infty$ pro jisté $\delta \in (0,\pi)$, pak
- F. ř. f v bodě x konverguje k $s(x)$.

(4) Platí Lebesgue-Riemannovo lemma:

Buď $f \in L^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$. Pak pro $\forall \beta \in \mathbb{R}$

(*) $\lim \int_I f(t) \sin(\alpha t + \beta) = 0$

mj. slabá konvergence

Speciálně:

$\beta = 0$, $\alpha = k$ $\quad \int_I f(t) \sin kt \, dt \to 0$ $\quad \sin kt \xrightarrow{*} 0$ v $L^2(I)$

$\beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = k$ $\quad \int_I f(t) \cos kt \, dt \to 0$ $\quad \cos kt \to 0$ v $L^2(I)$

(Dk) každou $f \in L^1$, lze rozložit $f = f^+ - f^-$, f^+, f^- jsou limitou jednoduchých fcí, stavebním jednoduché funkce je charakteristická funkce.

Je-li $f = \chi_I$, pak

$$\int_{I=(A,B)} \sin(\alpha t + \beta) \, dt = \left[\frac{\cos(\alpha t + \beta)}{\alpha}\right]_A^B \leq \frac{2}{\alpha} \to 0 \quad \alpha \to \infty.$$

□

$\boxed{\text{Gibbsův jev}}$ referuje ke špatnému chování n-tých částečných součtů v blízkosti skokových singularit.
Situaci si ilustrujeme na funkci $\operatorname{sgn} x$ na $(-\pi,\pi)$.
Dle Příkladu na str 7/23 víme, že platí:

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Označíme-li

$$S_n(x) := \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1},$$

pak derivace $S_n'(x)$ splňuje

$$S_n'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2k+1)x = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)x} = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left[e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i2kx}\right] \qquad q = e^{i2x}$$

$$= \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{1-e^{i2nx}}{1-e^{2ix}}\, e^{ix}\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{(e^{inx}-e^{-inx})(e^{inx})}{(e^{ix}-e^{-ix})}\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\,\frac{\sin nx\cos nx}{\sin x} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin 2nx}{\sin x}.$$

Funkce $\underline{S_n}$ tedy $\underline{\text{má kritické body}}$ v $x_j = j\frac{\pi}{2n}$ $j=0,1,\dots$
V těchto bodech máme

$$S_n\left(j\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(2k+1)\frac{j\pi}{2n}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{n}\,\frac{\sin(2k+1)\frac{j\pi}{2n}}{(2k+1)\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})(x_{k+1}-x_k) \qquad \text{kde } f(t) = \frac{\sin jt}{\sin t}$$

$$x_{k+1} = (2k+1)\frac{\pi}{2n}, \quad x_k = (2k-1)\frac{\pi}{2n}, \quad x_{k+1}-x_k = \frac{\pi}{n}$$

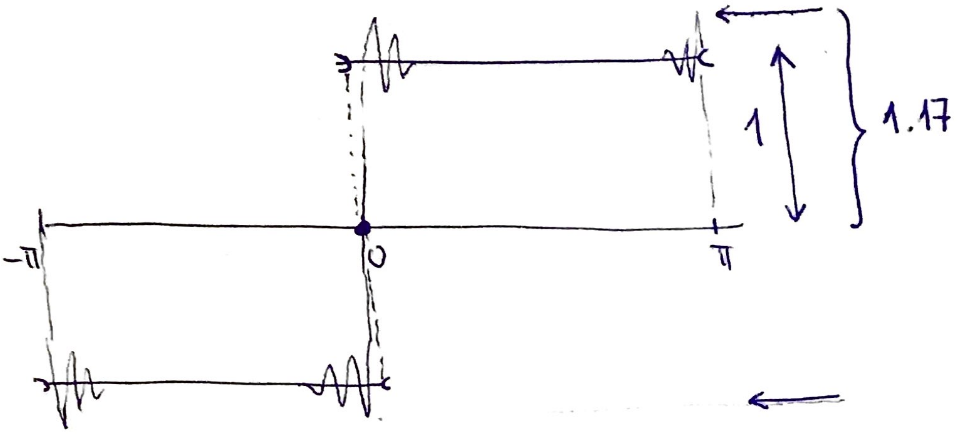
$$\approx \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin jt}{t}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi j}\frac{\sin s}{s}\,ds$$

$jt = s$
$j\,dt = ds$

a S_n nabývá největšího maxima v $j=1$,

kde $\boxed{S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \doteq 1.1790 \quad \text{pro KAŽDÉ } n \in \mathbb{N}}$ viz OBRÁZEK



OBR. V blízkosti bodů nespojitosti $(x=0, x=\pm\pi, \dots)$ dochází u n-tých částečných součtů S_n^f, pro $\forall n \in \mathbb{N}$, k **přestřelení** (overshoot) velikosti skoku: místo skoku velikosti 2 dostáváme v maximálních bodech $\left(x^n_{max}=\frac{\pi}{2n}, x^n_{min}=-\frac{\pi}{2n}\right)$ rozdíl 2.3580.
Toto je obecný nedostatek ortonormálních systémů (např. Čebyševovy polynomy aj.), že u nich dochází k přestřelení a oscilacím v blízkosti bodů nespojitosti typu skok.

Gibbsovu jevu se lze vyhnout zkoumáním (uvažováním) tzv. Cesarovských součtů σ_n^f definovaných vztahem

$$\sigma_n^f(x) = \frac{S_1^f(x) + \dots + S_n^f(x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k^f(x)$$

(aritmetický průměr prvních n částečných součtů F. řady)

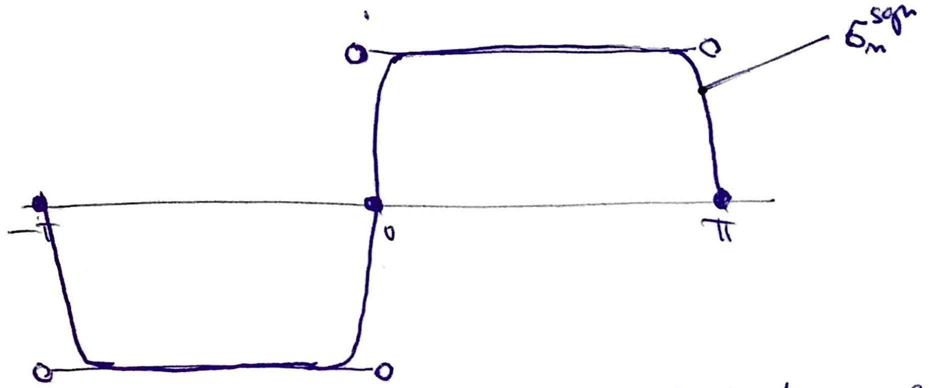
Věta 7.12 (Fejérova) Buď $f \in L^1(\langle 0, 2\pi\rangle)$, 2π-periodická.
Pokud $\frac{f(x+)+f(x-)}{2} \overset{\text{ozn.}}{:=} \lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ existuje,

pak $\sigma_n^f(x) \longrightarrow \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$

Pokud je navíc f spojitá na $\langle 0, 2\pi\rangle$,

pak $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ stejnoměrně na $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Větu dokazovat nebudeme.
Následující obrázek ilustruje jak σ_n^f aproximují $\mathrm{sgn}|_{(-\pi,\pi)}$.



OBR. Cesarovské součty oscilace ani přestřelení nevykazují. Ty jsou aritmetickými průměry s_k^{sgn} posloupnosti.

INTEGRÁLNÍ REPREZENTACE s_n^f

Postupujeme-li podobně jako v důkazu Věty 7.11, dostáváme:

$$s_n^f(x) = \sum_{|k| \le n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi}_{c_k = (f, \varphi_k)} e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sum_{k=-n}^{n} e^{-ik(\xi - x)} d\xi$$

POSTUPUJEME STEJNĚ JAKO V DŮKAZU VĚTY 7.11.

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) D_n(x-\xi) \quad \text{kde } \underbrace{D_n(x-\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)(x-\xi)\right)}{\sin\frac{x-\xi}{2}}}_{\text{Dirichletovo jádro}}$$

$$=: (f * D_n)(x),$$

kde jsme využili značení pro konvoluci dvou funkcí.

Def. Buď $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ takové, že $\int_\Omega f(\xi) g(x-\xi) d\xi$ má smysl pro $\forall x \in \Omega$ (skoro každé $x \in \Omega$). Pak

$$(f * g)(x) \equiv \int_\Omega f(\xi) g(x-\xi) d\xi$$ se nazývá KONVOLUCE f a g (kde g mají roli tzv. konvolučního jádra)

Jádro $D_n(x-\xi)$ je symetrické kolem bodu x, oscilující více v blízkosti x, a platí $\lim_{x \to \xi} D_n(x-\xi) = \frac{n+1}{\sqrt{2\pi}}$ (SNADNO OVĚŘÍTE) a ve smyslu distribucí $D_n(x-\xi) \longrightarrow \delta(x-\xi)$ (Diracova distribuce soustř. v $\xi = x$)

Odsud lze intuitivně očekávat, že na $s_n^f(x)$ má vliv jen symetrické okolí f bezprostředně x, tedy $s_n^f(x) \longrightarrow \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.