Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Otázka	1	2	3	**Body**
Maximum bodů	6	6	8	20
Získané body				

[6] 1. **(i)** Formulujte větu o implicitních funkcích pro $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{m+d} \to \mathbb{R}^m$ (o existenci a diferencovatelnosti implicitně zadané funkce). [2b]. *(Bonusové dva body můžete získat za důkaz věty.)*

(ii) Uveďte a dokažte nutnou podmínku existence potenciálu vektorového pole $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, kde Ω je otevřená množina. [2b]

(iii) Uveďte tvrzení o jednoznačnosti potenciálu a jeho důkaz. [2b]

Řešení:

(i) **Věta o implicitní funkci:** Nechť $U_0 \subset \mathbb{R}^d$ a $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny a $\mathbf{F} : V_0 \times U_0 \to \mathbb{R}^m$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1$. Nechť $(u_0, x_0) \in V_0 \times U_0$ je takový bod, že

$$\mathbf{F}(u_0, x_0) = 0,$$

a Jacobiho matice v bodě (u_0, x_0) je regulární, tj.

$$\det J(0,0) := \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(u_0, x_0) \right)_{i,j=1}^{m} \neq 0.$$

Pak existuje otevřená množina $U \subseteq U_0$ taková, že $x_0 \in U$ a existuje jednoznačně definovaná funkce $u \in (\mathcal{C}^1(U))^m$ taková, že pro každé $x \in U$

$$\mathbf{F}(u(x), x) = 0, \quad \text{a} \quad u(x_0) = u_0.$$

Důkaz: Pro jednoduchost předpokládejme, že $(u_0, x_0) = (0,0)$. Z předpokladů plyne, že existuje matice $\Gamma(0,0) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ taková, že $J^{-1}(0,0) = \Gamma(0,0)$. Pro každé $x \in U_0$ definujeme zobrazení $\mathbf{T}_x : V_0 \to \mathbb{R}^m$ předpisem

$$\mathbf{T}_x(u) := u - \Gamma(0,0)\mathbf{F}(u,x)$$

Chceme ukázat, že zobrazení $\mathbf{T}_x$ má jedinný pevný bod na okolí nuly. Použijeme variantu Banachovu věty, která předpokládá následující: existuje $\delta > 0$ a $q \in (0,1)$ takové, že pro každé $x \in B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^d$ a $u_1, u_2 \in B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^m$ platí

α) $|\mathbf{T}_x(u_1) - \mathbf{T}_x(u_2)|_{\mathbb{R}^m} \leq q|u_1 - u_2|_{\mathbb{R}^m}$

β) $|\mathbf{T}_x(0)|_{\mathbb{R}^m} \leq \delta(1-q)$.

Ověříme α), β)

$$\begin{aligned}
|\mathbf{T}_x(u_1) - \mathbf{T}_x(u_2)|_{\mathbb{R}^m} &= |u_1 - \Gamma(0,0)\mathbf{F}(u_1,x) - u_2 + \Gamma(0,0)\mathbf{F}(u_2,x)|_{\mathbb{R}^m} \\
&= \left|\Gamma(0,0)(\Gamma^{-1}(0,0)(u_1-u_2) - (\mathbf{F}(u_1,x) - \mathbf{F}(u_2,x)))\right|_{\mathbb{R}^m} \\
&= \left|\Gamma(0,0)\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}(0,0)(u_1-u_2) - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}(x,u^*)(u_1-u_2)\right)\right|_{\mathbb{R}^m} \\
&\le C\left\|\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}(0,0) - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}(x,u^*)\right\| |u_1-u_2|_{\mathbb{R}^m}
\end{aligned}$$

kde $u^* = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$ pro nějaké $\lambda \in (0,1)$ (použili jsme větu o střední hodnotě). Druhá nerovnost je

$$|\mathbf{T}_x(0)|_{\mathbb{R}^m} = |\Gamma(0,0)\mathbf{F}(0,x)|_{\mathbb{R}^m} = |\Gamma(0,0)(\mathbf{F}(0,x) - \mathbf{F}(0,x))|_{\mathbb{R}^m} \le C|x|_{\mathbb{R}^d}.$$

Díky tomu, že $\mathbf{F}$ je spojitě diferencovatelná, je z první nerovnsosti vidět, že existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro na $B_{\delta_0} \times B_{\delta_0}(0)$ platí α) pro nějaké $q \in (0,1)$. Nakonec, z druhé nerovnosti vidíme, že můžeme volit $\delta \le \delta_0$ tak, že β) platí. A tedy $\mathbf{T}_x$ má právě jeden pevný bod a tedy existuje $u(x)$ definované na $B_\delta(0)$ tak, že $\mathbf{F}(u(x),x) = 0$.

Ověříme ještě diferencovtelnost. Opět pomocí věty o střední hodnotě máme

$$0 = \mathbf{F}(u(x+te_j), x+te_j) - \mathbf{F}(u(x),x) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}(x^*,u^*)(u(x+te_j) - u(x)) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(x^*,u^*)t,$$

kde (x^*,u^*) je bod v okolí $(x,u(x))$. Vydělením t a spočtením $\lim_{t\to 0}$ získáme $\partial_{x_j} u$.

(ii) Nutná podmínka: Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřená množina, pokud má $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)^d$ potenciál, potom pro každé $i,j = 1,\dots,d$ a každý bod $x \in \Omega$ platí

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}.$$

Důkaz: Předpokládejme, že $\mathbf{F}$ má potenciál, tj. exituje $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ takové, že

$$\mathbf{F}(x) = \nabla\varphi(x).$$

Protože $\varphi \in \mathcal{C}^2$, platí zíměnnost druhých derivací a tedy

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}.$$

(iii) Pokud $\varphi, \psi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ jsou potenciály téhož vektorového pole $\mathbf{F}$ na otevřené souvislé množině Ω, tj.

$$\nabla\varphi(x) = \nabla\psi(x) = \mathbf{F}(x),$$

pak existuje konstanta C tak, že $\varphi(x) = \psi(x) + C$ pro každé $x \in \Omega$.

Důkaz: Ihned je vidět, že $\nabla(\varphi - \psi) = 0$. Protože Ω je souvislá, platí $\varphi - \psi$ je konstantní a důkaz je hotov.

[6] 2.

1. Zadefinujte pojem **homogenní skalární lineární obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu se spojitými reálnými koeficienty** na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. [1b]
2. Pro tuto rovnici formulujte počáteční úlohu. [1b]
3. Definujte pojem **maximální řešení** této úlohy. [1b]
4. Co lze říci o existenci a jednoznačnosti maximálního řešení této počáteční úlohy? Uveďte vztah maximálního intervalu existence řešení k intervalu I ze zadání 1). [1b]
5. Zformulujte Picard–Lindelöfovu větu. [1b]
6. Zformulujte Peanovu větu. [1b]
7. *Bonusová otázka: Uveďte hlavní myšlenky důkazu pro tvrzení o homogenní skalární lineární obyčejné diferenciální rovnici n-tého řádu se spojitými reálnými koeficienty z bodu 1). [3b]*

Řešení:

1. Obecná lineární homogenní ODR n-tého řádu:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0, \quad t \in I,$$

kde $a_j : I \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a I je interval.

2. Počáteční úloha: Buď $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ zadané počáteční hodnoty a $t_0 \in J \subset I$, kde J je interval. Najděte funkci $y : J \to \mathbb{R}$, která splňuje

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0, \qquad t \in J, \\ &y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{aligned}$$

3. Maximální řešení počáteční úlohy:

Řešení $y : J \to \mathbb{R}$ je **maximální**, pokud neexistuje jiné řešení $\tilde{y} : \tilde{J} \to \mathbb{R}$, kde $J \subsetneq \tilde{J}$ a $\tilde{y}$ splňuje stejnou počáteční úlohu a navíc $\tilde{y}|_J = y$.

Maximální interval J je otevřený interval obsahující t_0, na kterém je řešení definováno a nelze ho dále prodloužit.

4. Existence, jednoznačnost, hladkost a maximální interval:

   - Pro každou počáteční úlohu existuje **jediné maximální řešení** definované na maximálním intervalu J.
   - Pokud koeficienty $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathcal{C}^k$, potom řešení $y \in \mathcal{C}^{k+n}$.
   - Platí $J = I$.

5. **Picard–Lindelöfova věta:**

Nechť $\mathbf{f} : U_0 \times V_0 \to \mathbb{R}^n$, kde $U_0 \subset \mathbb{R}$ a $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny, $(x_0, \mathbf{y}_0) \in U_0 \times V_0$ a funkce $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ splňuje následující podmínky na nějakém otevřeném okolí $U \times V \subset U_0 \times V_0$ bodu $(x_0, \mathbf{y}_0)$:

(i) **Spojitost:** Funkce $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ je spojitá.

(ii) **Lipschitzová spojitost:** Existuje konstanta $L > 0$, taková že

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Pak existuje $\delta > 0$, takové že počáteční úloha

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(x) &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}_0, \end{aligned}$$

má právě jedno řešení $\mathbf{y} : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$.

6. **Peanova věta:**

Nechť $\mathbf{f} : U_0 \times V_0 \to \mathbb{R}^n$, kde $U_0 \subset \mathbb{R}$ a $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny, $(x_0, \mathbf{y}_0) \in U_0 \times V_0$ a funkce $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ splňuje následující podmínku na nějakém otevřeném okolí $U \times V \subset U_0 \times V_0$ bodu $(x_0, \mathbf{y}_0)$:

(i) **Spojitost:** Funkce $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ je spojitá.

Pak existuje $\delta > 0$, takové že počáteční úloha

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(x) &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}_0, \end{aligned}$$

má alespoň jedno řešení $\mathbf{y} : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$.

7. Hlavní myšlenky důkazu:
KROK 1: Převod na soustavu rovnic prvního řádu. Zavedeme vektorové funkce

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

převedeme rovnici na soustavu

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \tag{1}$$

kde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Počáteční podmínky jsou

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})^T.$$

KROK 2: Lokální existence a jednoznačnost. Soustava (1) obecně zapadá do problému

$$x' = f(t, x),$$

kde f je spojitá vyhledem k t (koeficienty a_i jsou spojité), a f je Lipschitzovská vzhledem k y (díky linearitě). Dle Picard–Lidelöfovy věty tedy existuje jednoznačné řešení $\mathbf{x}$ v okolí t_0. Hladkost řešení přímo čteme z rovnice a předpokladů na a_i.

KROK 3: Nalepení řešení a maximální interval. Chceme ukázat, že pokud $J = (a, b)$ je maximální interval, pak $J = I$, nebo-li, že řešení nemůže být prodlouženo. Předpokládejme spor a navíc předpokládejme, že $\lim_{t\to b_-} \mathbf{x}(t) =: \mathbf{y}_b$ existuje vlastní. Potom ale můžeme na okolí bodu b zopakovat celý postup s počáteční podmínkou $\mathbf{y}_b$ a díky jednoznačnosti získáme prodloužené řešení, což je spor. Zbývá tedy ukázat existenci vlastní llimity. Uvažujeme tedy případ $[a, b] \subset I$.

KROK 4: Omezenost řešení.. Ukážeme, že řešení i jedho derivace jsou omezené na $[a, b]$. Vynásobíme (1) skalárně s $\mathbf{x}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} = \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \leq C\|\mathbf{x}(t)\|^2_{\mathbb{R}^n}.$$

Násobení e^{-2Ct} vede k nerovnsoti

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2Ct}\|\mathbf{x}(t)\|^2_{\mathbb{R}^n}\right) \leq 0,$$

a tedy po integraci

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} \leq e^{2Ct}\|\mathbf{x}(0)\|^2_{\mathbb{R}^n} \leq K,$$

což implikuje omezenost řešení. Navíc ihned z (1) dostaneme, že

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} \leq \tilde{K}$$

pro všechny $t \in (a, b)$.

KROK 5: Existence limity.

Protože $\mathbf{x}$ je omezená, existuje posloupnost $t_n \nearrow b$ a existuje $\mathbf{X} \in mathbbR^n$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{X}.$$

Ukážeme, že i $\lim_{t\to b_-} \mathbf{x}(t) = \mathbb{X}$ a tím bude důkaz hotov. Ale díky trojúhelníkové nerovnosti a větě o střední hodnotě a díky omezenosti derivací máme

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbb{X}| \leq |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_k)| + |\mathbf{x}(t_k) - \mathbb{X}| \leq |\mathbf{x}'(\tau)||t - t_k| + |\mathbf{x}(t_k) - \mathbb{X}|.$$

Nyní, druhý člen je malý přímo z konstrukce a první díky tomu, že t i t_k budou konvergovat k b.

8. Vztah intervalu J a I: Už bylo ukázáno výše, že $J = I$.

[8] 3. Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$.

1. Definujte následující pojmy: [3b]
   - vnitřek množiny M, tj. M°,
   - hranice množiny M, tj. ∂M,
   - uzávěr množiny M, tj. $\overline{M}$.
2. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení. Buď je dokažte nebo najděte protipříklad.
   (a) ∂M je uzavřená $\implies$ $\overline{M} = M$. [1b]
   (b) $(M \setminus M^\circ = \overline{M} \setminus M) \implies (M = \emptyset$ nebo $M = \mathbb{R}^d)$. [2b]
   (c) $(M = \emptyset$ nebo $M = \mathbb{R}^d) \implies (M \setminus M^\circ = \overline{M} \setminus M)$. [1b]
   (d) $\overline{M \setminus M^\circ} = \partial M$. [1b]
   (e) *Bonusová otázka:* $\overline{M} = M \implies \partial M$ *je uzavřená. [3b]*

Řešení:

1. **Definice:**
   - M° je definována jako množina všech vnitřních bodů $x \in M$, tj. bodů $x \in M$, pro které existuje otevřená okolí U taková, že $U(x) \subset M$.
   - ∂M je definována jako množina všech hraničních bodů x, kde $x \in \mathbb{R}^d$ se nazývá hraniční bod M pokud platí: Pro každé okolí $U(x)$ máme $U(x) \cap M \neq \emptyset$ a $U(x) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$.
   - $\overline{M} := M \cup \partial M$.
2. **Implikace:**
   (a) **Nepravda:** Např. $M = (0, 1)$. Pak $\partial M = \{0, 1\}$ je uzavřená, ale $\overline{M} = [0, 1] \neq (0, 1) = M$.
   (b) **Pravda:** Nejdříve ukážeme, že pokud platí $M \setminus M^\circ = \overline{M} \setminus M$, potom $M \setminus M^\circ = \emptyset$. Předpokládejme pro spor, že jde o neprázdnou množinu, potom musí existovat $x \in \mathbb{R}^d$ takové, že

   $$(x \in M) \wedge (x \notin M^\circ) \wedge (x \in \overline{M}) \wedge (x \notin M).$$

   Výraz $(x \in M) \wedge (x \notin M)$ je však nepravdivý a tedy takové x nemůže existovat a tedy $M \setminus M^\circ = \overline{M} \setminus M = \emptyset$, což implikuje, že $M = M^\circ$ a $\overline{M} = M$ a tedy, že M je otevřená i uzavřená. Takové množiny jsou však jenom dvě a to $\emptyset$ a $\mathbb{R}^d$.
   (c) **Pravda:** V obou případech jsou všechny tři množiny (vnitřek, uzávěr, samotná množina) stejné, rozdíly jsou prázdné.
   (d) **Nepravda:** Např. $M = (0, 1)$. Pak $M \setminus M^\circ = \emptyset$, ale $\partial M = \{0, 1\}$. Takže uzávěr levé strany je prázdný, pravá ne.

(e) **Pravda:** Dokážeme mnohem silnější tvrzení a to, že ∂M je uzavřená vždy.
Z definice uzavřenosti potřebujeme tedy ukázat, že $\mathbb{R}^d \setminus \partial M$ je otevřená množina, tzn. chceme ukázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial M$ existuje otevřené okolí $U(x) \subset \mathbb{R}^d \setminus \partial M$.
Buď $x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial M$. Z definice hranice plyne, že existuje otevřené okolí $U(x)$, které *nesplňuje jednu ze dvou podmínek* definice hranice. Tedy platí buď:

- Buď $U(x) \cap M = \emptyset$, tj. $U(x) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus M$,
- nebo $U(x) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) = \emptyset$, tj. $U(x) \subseteq M$.

V obou případech tedy okolí $U(x)$ leží buď celé v M, nebo celé v $\mathbb{R}^d \setminus M$.
Ukážeme, že takové okolí $U(x)$ **nemůže obsahovat** žádný bod z hranice ∂M.

- Pokud $U(x) \subseteq M$, pak žádný bod $y \in U(x)$ nemůže ležet v ∂M, protože jeho nějaké okolí $U_1(y) \subset U(x)$ a tedy má prázdný průnik s $\mathbb{R}^d \setminus M$, čímž porušuje definici hranice.
- Pokud $U(x) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus M$, pak analogicky žádný bod $y \in U(x)$ nemůže ležet v ∂M, protože jeho okolí bude mít prázdný průnik s M.

Tedy dostáváme
$$U(x) \cap \partial M = \emptyset$$
a proto je $\mathbb{R}^d \setminus \partial M$ otevřená množina.