Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Otázka	1	2	3	**Body**
Maximum bodů	6	6	8	20
Získané body				

[6] 1. 1. Zformulujte následující kritéria pro konvergence řad:
- Cauchyovo (odmocninové) kritérium (limitní verzi),
- D'Alembertovo (podílové) kritérium (limitní verzi),
- Dirichletovo kritérium.

2. Uvažujte posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

(a) Buď b_n omezená. Potom

$$|a_n| \leq e^n \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n!} \text{ konverguje.}$$

(b) Buď b_n monotónní. Potom

$$a_n \in [n-\pi, n+\pi], \quad b_n \to 0 \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)\, b_n \text{ konverguje.}$$

(c) Buď b_n monotónní. Potom

$$a_n \in \left[n - \frac{\pi}{n^2}, n + \frac{\pi}{n^2}\right], \quad b_n \to 0 \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)\, b_n \text{ konverguje.}$$

(d) Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nezáporná a rostoucí, a $a_n \nearrow 1$. Potom

$$b_n \geq \frac{n}{1-a_n} \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{b_n} \text{ konverguje.}$$

Řešení:

1. Kritéria konvergence řad

- **Odmocninové kritérium (Cauchyovo):** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nezáporná posloupnost. Definujme

$$L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Potom platí:

(i) Pokud $L < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(i) Pokud $L > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

- **Podílové kritérium (d'Alembertovo):** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nezáporná posloupnost a existuje
$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
Potom platí:
  - Pokud $L < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
  - Pokud $L > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
- **Dirichletovo kritérium:** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel taková, že má omezenou posloupnost částečných součtů a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní posloupnost reálných čísel splňující $b_n \to 0$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

2. Platnost implikací:

(a) **Pravdivé:** Díky předpokladů stačí ukázat konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} =: \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$
Na koeficienty c_n použijeme podílové kritérium
$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0.$$
Řada tedy konverguje.

(b) **Nepravdivé:** Zvolíme protipříklad následujícím způsobem. Protože interval $[-\pi + n, n + \pi]$ je interval délky 2π, můžeme najít $a_n \in [-\pi + n, n + \pi]$ takové, že $a_n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Volíme $b_n := \frac{1}{n}$. Potom
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)\, b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$
což je harmonická řada a ta diverguje.

(c) **Pravdivé:** Nejdříve řadu rozepíšeme pomocí součtových vzorců pro sin a cos a použijem větu o střední hodnotě. Dále $\xi_n \in [n - \pi/n^2, n + \pi/n^2]$ a máme
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n) b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n - (n - a_n)) b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)\cos(n - a_n) b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)\sin(n - a_n)) b_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)(\cos(n - a_n) - 1) b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)\sin(n - a_n)) b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) b_n.\end{aligned}$$

Nyní, poslední řada konverguje dle Dirichletova kritéria, neboť posloupnost $\cos n$ má omezené částečné součty. Pro první řadu platí

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n)(\cos(a_n-n)-1)b_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos(a_n-n)|b_n| \le C\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-n)^2$$
$$\le \tilde{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n^2}\right)^2$$

a tato řada konverguje. Konečně pro druhou řadu použijeme velmi podobný odhad a ta také konverguje, neboť

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\sin(a_n-n)b_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\sin(a_n-n)||b_n| \le C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2}$$

a poslední řada opět konverguje.

(d) **Pravdivé:** K důkazu použijeme odmocninové kritérium a předpoklad na chování posloupnosti b_n

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n^{b_n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\ln a_n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{b_n(a_n-1)}{n}\frac{\ln(1+(a_n-1))}{a_n-1}} = \frac{1}{e^{\lim_{n\to\infty}\frac{b_n(1-a_n)}{n}}}$$
$$\le \frac{1}{e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-a_n)}{n(1-a_n)}}} = \frac{1}{e} < 1.$$

Řada tedy konverguje dle odmocninového kritéria.

[6] 2. Nechť $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce. Vyřešte následující úlohy.

(i) Definujte následující pojmy pro funkci f:

- parciální derivace,
- derivace ve směru,
- totální diferenciál.

(ii) Jakým způsobem je (pokud existuje) reprezentován totální diferenciál funkce f? Dokažte.

(iii) Dokažte následující vztahy pro totální diferenciál funkcí f a g za předpokladu, že všechny objekty existují

a) $d(f+g) = df + dg$

b) $d(fg) = f\,dg + g\,df$

c) $d(f/g) = \dfrac{g\,df - f\,dg}{g^2}$, kde $g(x) \neq 0$

(iv) Rozhodněte o pravdivosti následujících implikací a své rozhodnutí odůvodněte:

a) Pokud existuje $df(x)$, potom existují derivace ve všech směrech.

b) Pokud existují derivace ve všech směrech, potom existuje $df(x)$.

Řešení:

(i) **Definice:**

– Pro libovolné $i = 1, \dots, d$ definujeme parciální derivaci funkce f podle x_i v bodě $y \in \mathbb{R}^d$ jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y_1, \dots, y_{i-1}, y_i + h, y_{i+1}, \dots, y_d) - f(y)}{h}.$$

– Pro libovolné $v, y \in \mathbb{R}^d$ definujeme derivaci funkce f ve směru v v bodě y jako

$$\partial_v f(y) = D_v f(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y + hv) - f(y)}{h}.$$

– Lineární zobrazení $df_y : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme totálním diferenciálem funkce f v bodě $y \in \mathbb{R}^d$, pokud platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(y + h) - f(y) - df_y(h)}{\|h\|} = 0.$$

(ii) Pokud totální diferenciál funkce f v bodě $x \in \mathbb{R}$ existuje, pak pro každé $h \in \mathbb{R}^d$ platí

$$df_y(h) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) h_i = \nabla f(y) \cdot h.$$

Důkaz: Volme $h := \pm t e_i$, kde e_i je i-tý vektor kanonické báze. Potom z existence totálního diferenciálu a jeho linearity získáme

$$0 = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x \pm t e_i) - f(x) - df_x(\pm t e_i)}{\| \pm t e_i \|} = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x \pm t e_i) - f(x)}{t} \mp df_x(e_i),$$

což dává $df_x(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ a z linearity df_x plyne zbytek.

(iii) Můžeme použít předchozí výsledek a vidíme (předpokládáme, že všechny diferenciály existují), že stačí ověřit

a) $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$

b) $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = f\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial f}{\partial x_i}$

c) $\frac{\partial}{\partial x_i}(f/g) = \dfrac{g\,\frac{\partial f}{\partial x_i} - f\,\frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}$

což se ukáže stejně jako v případě funkce jedné proměné.

(iv) Pravdivost implikací

a) **Platí:** Nechť $v \in \mathbb{R}^d$ je libovolný nenulový. Z existence diferenciálu získáme

$$\begin{aligned}\partial_v f(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)-df_x(tv)}{t} + df_x(v)\\ &= \|v\|\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)-df_x(tv)}{\|tv\|} + df_x(v) = df_x(v).\end{aligned}$$

b) **Neplatí:** Uvažujme funkci

$$f(x,y) = \begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Spočteme

$$\partial_v f(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{(tv_1)^2tv_2}{(tv_1)^2+(tv_2)^2}}{t} = f(v) \implies \partial_{x_1}f(0) = \partial_{x_2}f(0) = 0.$$

Směrová derivace tedy exituje a vidíme, že pokud existuje totální diferenciál musí platit $d_0(h) = 0$. Pokud tedy totální diferenciál existuje, musí platit

$$0 = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)-df_0(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\frac{h_1^2h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Poslední limita však neexituje. Pro $h = (\varepsilon, 0)$ je výraz identicky nulový. Pro výraz $h = (\varepsilon,\varepsilon)$ je výraz roven $2^{-\frac{3}{2}}$.

[8] 3. Uvažujte Banachův prostor X a funkcionál $F : X \to \mathbb{R}$.

1. Definujte následující pojmy:
   - Gâteauxova derivace (diferenciál)
   - Fréchetova derivace (diferenciál)
   - Konvexní funkcionál
   - Lokální minimum funkcionálu
2. Uveďte a dokažte nutnou podmínku (Eulerovu), aby $x_0 \in X$ bylo lokálním minimem funkcionálu F.
3. Uveďte a dokažte postačující podmínku (druhá variace, Lagrangeova), aby x_0 bylo ostrým minimem funkcionálu F.
4. Uvažujte Banachův prostor $X := \mathcal{C}([0,1])$ a funkcionál definovaný předpisem

$$F(y) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(y^2(x_n) - y(x_n)\right) 2^{-n}, \quad \text{kde } x_n := 2^{-n}.$$

   (a) Zapište **nutnou Eulerovu podmínku** na existenci minima pro tento funkcionál.

   (b) Zapište **nutnou Lagrangeovu podmínku** na existenci minima pro tento funkcionál.

   (c) **Bonusová otázka:** Dokažte, že funkcionál F má nejednoznačný minimizér, uveďte alespoň jeden a dokažte, že jakýkoliv minimizér splňuje $y(0) = \frac{1}{2}$.

Řešení:

1. **Definice:**

Gâteauxova derivace: Funkcionál F má v bodě $x \in X$ Gâteauxovu derivaci ve směru $h \in X$, pokud existuje limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x + \varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon} =: \delta F(x; h).$$

Fréchetova derivace: Funkcionál F má Frechetův diferenciál v bodě x, pokud existuje lineární spojité zobrazení $DF(x) : X \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x) - DF(x)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Konvexní funkcionál: Funkcionál F je konvexní, pokud pro každé $x, y \in X$ a $\lambda \in [0,1]$ platí

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y).$$

Lokální minimum: Bod x_0 je lokálním minimem funkcionálu F, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\|x - x_0\| < \delta \implies F(x) \geq F(x_0).$$

2. **Nutná podmínka (Eulerova):** Má-li F má v bodě x_0 lokální minimum a je v bodě x_0 Gâteauxovski diferencovatený, potom

$$\delta F(x_0; h) = 0 \quad \forall h \in X$$

Důkaz: Z minima plyne, že funkce $\varphi(t) = F(x_0 + th)$ má lokální minimum v $t = 0$. A tedy pokud existuje, pak $\varphi'(0) = 0$. Nicméně tato derivace existuje protože platí

$$0 = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \delta F(x_0; h).$$

3. **Postačující podmínka (Lagrangeova):** Nechť F je dvakrát spojitě Gâteauxovski diferencovatený v okolí x_0. Potom platí:

$$DF(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad \delta^2 F(x_0; h, h) \geq \alpha \|h\|^2,\ \alpha > 0 \implies x_0 \text{ je ostré lokální minimum}$$

Důkaz: Protože je $\delta^2 F(x; h, h)$ spojitý na okolí bodu x_0, pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\delta^2 F(x; h, h) \geq \frac{\alpha}{2}\|h\|^2$ pro každé x splňující $\|x - x_0\| \leq \delta$ a každé $h \in X$. Nechť $x \in X$ je libovolný splňující $0 < \|x - x_0\| \leq \delta$. Potom definujme funkci $\varphi(t) := F(x_0 + t(x - x_0))$ a dostaneme, že existuje $t_0 \in (0, 1)$ takové, že

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(t_0) \\ &= \delta F(x_0, h) + \frac{1}{2}\delta^2 F(x_0 + t_0(x - x_0); (x - x_0), (x - x_0)) \geq \frac{\alpha}{2}\|x - x_0\|^2 > 0 \end{aligned}$$

a tedy x_0 je bodem ostrého lokálního minima.

4. **Funkcionál F:** Protože uvažujeme prostor spojitých funkcí, víme, že y je omezená na $[0, 1]$ a tedy $|F(y)| \leq (\|y\|^2 + \|y\|) \sum 2^{-n} = \|y\|^2 + \|y\|$ je dobře definovaný funkcionál.

(a) Z definice spočteme $\delta F(y; h)$ a nutná podmínka říká, že v bodě minima je nulový pro každou $h \in X$. Uvažujme

$$\begin{aligned} 0 = \delta F(y; h) &= \lim_{t\to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{(y(x_n) + th(x_n))^2 - (y(x_n) + th(x_n)) - y^2(x_n) + y(x_n)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{2ty(x_n)h(x_n) + t^2 h^2(x_n) - th(x_n)}{t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(2y(x_n) - 1)h(x_n). \end{aligned}$$

(b) Obdobně spočteme $\delta^2 F(y; h, h)$ pomocí $\varphi''(0)$ kde $\varphi(y + th)$ a máme

$$\delta^2 F(y; h, h) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} h^2(x_n) \geq 0$$

Vidíme, že nutná podmínka je automaticky splněna.

(c) Protože $a^2 - a \geq -\frac{1}{4}$, přičemž rovnost nastává pouze pro $a = \frac{1}{2}$. Vidíme, že $F(y) \geq -\frac{1}{4} \sum 2^{-n} = -\frac{1}{4}$. Volbou např. $y \equiv -\frac{1}{4}$ najdeme kýžený minimizér. Ten není jednoznačný, např. stačí přičíst jakoukoliv funkci $\tilde{y}$, která splňuje $\tilde{y}(x) = 0$ pro $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Podmínku na limitu určíme z podmínky na minimizér

$$0 = \delta F(y; h) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(2y(x_n) - 1)h(x_n).$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ volíme $h_n(x) := 0$ pro $x \in [0, 2^{-n} - 2^{-n-2}, 2^{-n} + 2^{-n-2}, 1]$ a jinde libovolně. S touto volbou získáme

$$0 = \delta F(y; h_n) = 2^{-n}(2y(2^{-n}) - 1)h_n(2^{-n}).$$

a tedy protože můžeme volit $h(2^{-n}) = 1$, musí platit $y(2^{-n}) = \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože y je spojitá, musí platit

$$y(0) = \lim_{x \to 0} y(x) = \lim_{n \to \infty} y(2^{-n}).$$