Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

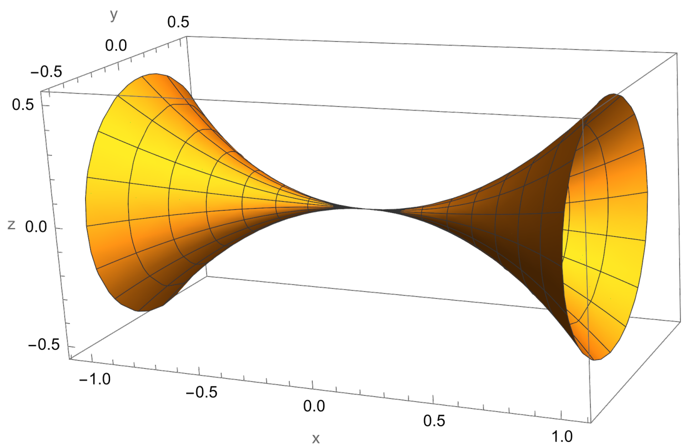
Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Body**
Maximum bodů	5	6	4	7	8	30
Získané body						

[5] 1. Spočítejte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací funkce $y = \frac{x^2}{2}$ kolem osy x pro $x \in (-1, 1)$.
Nápověda: Identity, které se mohou hodit:

$$\cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u, \qquad \sinh 2u = 2 \sinh u \cosh u, \qquad \cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u$$

$$\cosh^2 u = \frac{\cosh(2u) + 1}{2}, \qquad \sinh^2 u = \frac{\cosh(2u) - 1}{2}.$$



Obrázek 1: Vzniklé rotační těleso

Řešení:

Použijeme vzorec pro výpočet povrchu rotačního tělesa kolem osy x:

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $x = \sinh u$. Tato substituce zobrazuje interval $(-a, a)$ na interval $(1, 1)$, kde $a = \sinh^{-1}(1)$. Tato substituce vede k $\mathrm{d}x = \cosh u\,\mathrm{d}u$. Z této substituce dostaneme (použitím vzorce $\cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u$):

$$S = \pi \int_{-a}^{a} \sinh^2 u\sqrt{1 + \sinh^2 u}\,\cosh u\,\mathrm{d}u = \pi \int_{-a}^{a} \sinh^2 u \cosh^2 u\,\mathrm{d}u$$

Použijeme identity pro hyperbolické funkce:

$$\cosh^2 u = \frac{\cosh(2u)+1}{2}, \qquad \sinh^2 u = \frac{\cosh(2u)-1}{2}.$$

Po dosazení těchto identit do integrálu dostaneme

$$S = \pi \int_{-a}^{a} \sinh^2 u \cosh^2 u \,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\int_{-a}^{a} (\cosh(2u)+1)(\cosh(2u)-1)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\int_{-a}^{a} \cosh^2(2u) - 1\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\pi}{8}\int_{-a}^{a} \cosh(4u) - 1\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{8}\left[\frac{\sinh(4u)}{4} - u\right]_{-a}^{a} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\sinh(4a)}{2} - 2a\right).$$

Poslední výraz lze ještě eventuálně upravit díky vzorci

$$\sinh 4u = 2\sinh(2u)\cosh(2u) = 4\sinh u \cosh u(\cosh^2 u + \sinh^2 u) = 4\sinh u\sqrt{1+\sinh^2 u}(1+2\sinh^2 u)$$

a definici $a = \sinh^{-1}(1)$

$$S = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\sinh(4a)}{2} - 2a\right) = \frac{\pi}{4}\left(\sinh a\sqrt{1+\sinh^2 a}(1+2\sinh^2 a) - a\right) = \frac{\pi}{4}\left(3\sqrt{2} - \sinh^{-1}(1)\right).$$

[6] 2. Na intervalu $(-2, \infty)$ najděte **všechna** řešení y problému

$$y' = \frac{2x\sqrt{|25 - y^2|}}{y},$$

která splňují obě následující podmínky

$$y(0) = 3, \quad y(3) = 5\sqrt{2}.$$

Řešení:

Vidíme, že $y = \pm 5$ je stacionární řešení. Pro $y \neq 5$ budeme řešit pomocí separace proměnných.

Pro $y^2 < 25$ máme

$$(x^2)' = 2x = \frac{y}{\sqrt{25 - y^2}} y' = -\left(\sqrt{25 - y^2}\right)' \implies \sqrt{25 - y^2} = C_1 - x^2$$

kde musí být splněna podmínka $C_1 \geq x^2$. Řešení má tedy tvar

$$y = \pm\sqrt{25 - (C_1 - x^2)^2}.$$

Pro $y^2 > 25$ máme

$$(x^2)' = 2x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 25}} y' = \left(\sqrt{y^2 - 25}\right)' \implies \sqrt{y^2 - 25} = x^2 - C_2$$

kde musí být splněna podmínka $C_2 \leq x^2$. Řešení má tedy tvar

$$y = \pm\sqrt{25 + (x^2 - C_2)^2}.$$

Máme zadané hodnoty ve třech bodech. Okolí každého bodu budeme zkoumat zvlášť.

Bod $y(3) = 5\sqrt{2}$: Protože $(5\sqrt{2})^2 > 25$ použijeme větev řešení s C_2. Zde má řešení tvar $y = \pm\sqrt{25 + (x^2 - C_2)^2}$ a musí platit $C_2 \leq x^2$. Dosazením podmínky máme

$$5\sqrt{2} = y(3) = \sqrt{25 + (3^2 - C_2)^2} \implies 50 = 25 + (9 - C_2)^2 \implies C_2 = 4.$$

Ještě bychom mohli uvažovat $C_2 = 14$ ale potom by na okolí bodu $x = 3$ určitě neplatilo $x^2 \geq C_2$. Na okolí $x = 3$ máme jednoznačné řešení tvaru

$$y = \sqrt{25 + (x^2 - 4)^2},$$

a řešení je určeno na intervalu, kde $x^2 - 4 > 0$, což je $(2, \infty)$.

Bod $y(0) = 3$: Protože $3^2 < 25$ použijeme větev řešení s C_1. Zde má řešení tvar $y = \sqrt{25 - (C_1 - x^2)^2}$ a musí platit $C_1 \geq x^2$. Dosazením podmínky máme

$$3 = y(0) = \sqrt{25 - C_1^2} \implies C_1 = 4.$$

Ještě bychom mohli uvažovat $C_1 = -4$ ale potom by na okolí bodu $x = 0$ určitě neplatilo $x^2 \leq C_1$. Na okolí $x = 0$ máme jednoznačné řešení tvaru

$$y = \sqrt{25 - (4 - x^2)^2},$$

a řešení je určeno na intervalu, kde $x^2 - 4 < 0$, což je $(-2, 2)$.

Zbývá řešení vhodně dolepit. Naštěstí jsou ale konstanty zvoleny tak, že řešení v bodě $x = 2$ plynule přechází z jedné větve do druhé. Celkově tedy:

$$y = \begin{cases} \sqrt{25 - (4 - x^2)^2} & x \in (-2, 2), \\ \sqrt{25 + (x^2 - 4)^2} & x \in [2, \infty) \end{cases}$$

a toto řešení je jednoznačné.

[4] 3. Zjistěte, zda následující řada konverguje nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}.$$

Řešení:

Označme

$$a_n := \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}.$$

Díky přítomnosti faktoriálů, zkusíme podílové kritérium. Pro $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ máme

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}}{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2 4^{n+1}}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} \cdot \frac{((n+1)!)^2 4^{n+1}}{(2n+2)!} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}.$$

Vidíme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n+1} = 1$$

a tedy podílové kritérium nám o konvergenci nic neříká. Zkusíme použít (jemnější) Raabeho kriterium a označme L jako

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

Dosadíme náš výraz pro $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ a máme

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Protože $L = \frac{1}{2} < 1$, použití Raabeho kritéria dává divergenci původní řady.

[7] 4. Najděte globální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 9z^2 + 6xz$$

na množině

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Řešení:

Nejdříve stojí za povšimnutí, že funkce f se dá upravit jako

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 9z^2 + 6xz = (x+3z)^2 + 2y^2.$$

Funkce je tedy nezáporná a v bodech $(-3z, 0, z)$ nabývá globálního minima, které je nula. Funkce je spojitá a proto musí nabývat i globálního maxima na kompaktní množině K.

Nejdříve se soustředíme na možné extrémy uvnitř K. Spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 6z, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 18z + 6x. \tag{3}$$

Všechny nulové body jsou ve tvaru $(-3z, 0, z)$, což už víme, že jsou body globálního minima.

Maximum se tedy musí nabývat na hranici K. Použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů s vazbou

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Vyjádříme gradienty

$$\begin{aligned} \nabla f &= (2x + 6z, 4y, 18z + 6x), \\ \nabla g &= (2x, 2y, 2z), \end{aligned}$$

a vidíme, že $\nabla g = (0,0,0)$ pouze v bodě $(0,0,0)$, což není bod hranice. Globální maximum tedy musí být v bodě (x,y,z), který je řešením soustavy rovnic (pro (x,y,z,λ))

$$\begin{aligned} 2x + 6z &= 2\lambda x, \\ 4y &= 2\lambda y, \\ 18z + 6x &= 2\lambda z, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Z druhé podmínky dostáváme možnosti, že buď $y = 0$ nebo $\lambda = 2$.

Pro $\lambda = 2$ se rovnice redukují na

$$\begin{aligned} -2x + 6z &= 0, \\ 14z + 6x &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Tato soustava má právě dvě řešení $(0, \pm 1, 0)$. Pro tyto body máme

$$f(0, \pm 1, 0) = 2.$$

Pro $y = 0$ se rovnice redukují na

$$\begin{aligned} 2x + 6z &= 2\lambda x, \\ 18z + 6x &= 2\lambda z, \\ x^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Vynásobením první rovnice 3 a porovnáním s druhou získáme

$$6\lambda x = 2\lambda z.$$

A tedy buď $\lambda = 0$ nebo $z = 3x$. Pokud $\lambda = 0$, pak z prvních dvou rovnic dostaneme bod $(-3z, 0, z)$, což jsou body studované už v předešlé části a jsou to body globálního minima.

Pokud $z = 3x$, může být λ libovolné a dostaneme podmínku

$$1 = x^2 + z^2 = x^2 + (3x)^2 = 10x^2 \implies x = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$$

a podezřelé body jsou $(\pm\frac{\sqrt{10}}{10}, 0, \pm\frac{3\sqrt{10}}{10})$ a

$$f(\pm\frac{\sqrt{10}}{10}, 0, \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}) = 10.$$

Porovnáním všech hodnot zjistíme, že maximum funkce je 10, které se nabývá v bodech $(\pm\frac{\sqrt{10}}{10}, 0, \pm\frac{3\sqrt{10}}{10})$.

[8] 5. Mějme funkce F a G zadané

$$F(u,v,x,y) := \sin u + v + \frac{x^2}{2} + y^2,$$
$$G(u,v,x,y) := u - \sin v + x^2 + 2y^2.$$

- Ověřte, že v bodě $(u,v,x,y) = (0,0,0,0)$ jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ lze vyjádřit jako hladké funkce v okolí bodu $(0,0)$. Spočtěte parciální derivace prvního řádu funkcí u a v v bodě $(0,0)$.
- Rozhodněte, zda u a v mají v bodě $(0,0)$ lokální extrém a pokud ano, charakterizujte jaký.

Řešení:

Ověření podmínek věty o implicitní funkci:
Nejprve snadým dosayením zjistíme, že $F(0,0,0,0) = G(0,0,0,0) = 0$. Dále spočteme Jakobiho matici pro dvojici F a G

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}_{(0,0,0,0)} = \begin{pmatrix} \cos u & 1 \\ 1 & -\cos v \end{pmatrix}_{(0,0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice je regulární. Protože jsou obě funkce F i G hladké, věta o implicitní funkci říká, že na okolí bodu $(0,0)$ existují funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ takové, že $F(u(x,y),v(x,y),x,y) = G(u(x,y),v(x,y),x,y) = 0$.

Výpočet prvních parciálních derivací:
Derivujeme vztahy $F(u(x,y),v(x,y),x,y) = 0$ a $G(u(x,y),v(x,y),x,y) = 0$ podle x:

$$\begin{aligned} \cos u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + x &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \cos v \frac{\partial v}{\partial x} + 2x &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

V bodě $(0,0)$ platí $\cos u = \cos 0 = 1$, takže soustava se redukuje na

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má jediné řešení

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Analogicky derivujeme podle y:

$$\begin{aligned} \cos u \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} + 2y &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \cos v \frac{\partial v}{\partial y} + 4y &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

v bodě $(0,0)$ tedy máme

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) + \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) - \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$$

a opět dostáváme

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Bod $(0,0)$ tedy může být bodem extrému pro obě dvě funkce.

Výpočet druhých parciálních derivací:
Postupně budeme derivovat (4) podle x a y a (5) podle y. Po zderivování (4) podle x získáme:

$$-\sin u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cos u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 1 = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin v \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \cos v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 = 0.$$

Dosazením bodu $(0,0)$ tedy máme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,0) + 1 = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,0) + 2 = 0.$$

Soustava má jedno řešení

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{3}{2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,0) = \frac{1}{2}.$$

Po zderivování (5) podle y získáme:

$$-\sin u \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \cos u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin v \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \cos v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4 = 0.$$

Dosazením bodu $(0,0)$ získáme soustavu pro derivace v bodě $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(0,0) + 2 = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(0,0) + 4 = 0.$$

Soustava má řešení

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) = -3, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 1.$$

Derivací (4) podle y dostaneme:

$$-\sin u \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \cos u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin v \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \cos v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0.$$

a tedy v bodě $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(0,0) = 0,$$

což vede k

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Určení lokálních extrémů:

Pro funkci $u(x,y)$ je Hessova matice druhých derivací v bodě $(0,0)$

$$H(u)|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

To je matice negativně definitní a tedy u má v bodě $(0,0)$ lokální maximum.

Pro funkci $v(x,y)$ je Hessova matice

$$H(v)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To je pozitivně definitní matice a v má tedy v bodě $(0,0)$ lokální minimum.