Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

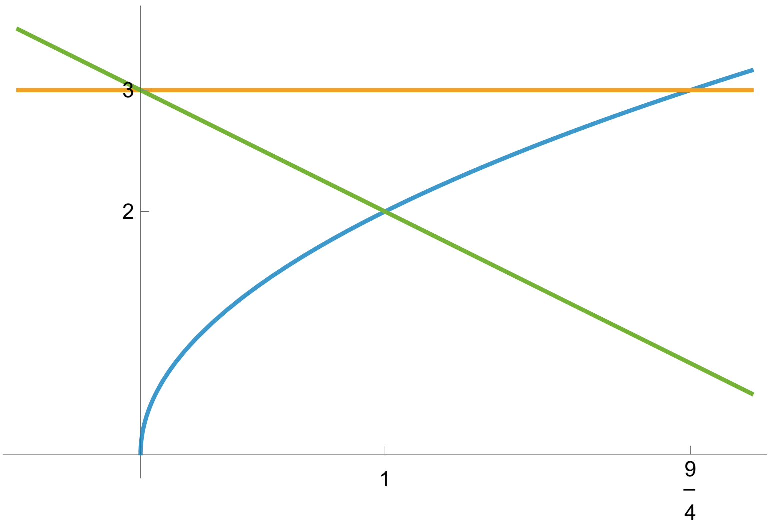
Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Body**
Maximum bodů	5	7	4	7	7	30
Získané body						

[5] 1. Uvažujte plochu, která je **omezená** a vymezená funkcemi (křivkami)

$$y_1 = 2\sqrt{x}, \qquad y_2 = 3, \qquad y_3 = 3 - x.$$

Spočtěte její obsah.



Obrázek 1: Graf plochy vymezené y_1, y_2 a y_3

Řešení:

Pro výpočet obsahu oblasti ohraničené těmito křivkami nejprve nalezneme průsečíky těchto křivek.

Průsečík křivek y_1 a y_2:

$$y_1 = y_2 \implies 2\sqrt{x} = 3 \implies x = \frac{9}{4}$$

a tedy průsečík je $P_{12} = [9/4, 3]$.

Průsečík křivek y_2 a y_3:

$$y_2 = y_3 \implies 3 = 3 - x \implies x = 0$$

a tedy průsečík je $P_{23} = [0, 3]$.

Průsečík křivek y_1 a y_3:

$$y_1 = y_3 \implies 2\sqrt{x} = 3 - x \implies 4x = 9 - 6x + x^2 \implies 0 = (x-1)(x-9)$$

Řešení $x = 9$ ale musíme, vyloučit neboť nesplňuje původní zadání. Jedniný průsečík je tedy $P_{13} = [1, 2]$ a oblast je tedy ohraničena body $[0, 3]$, $\left[\frac{9}{4}, 3\right]$ a $[1, 2]$. Rozdělíme oblast na dvě části podle hodnot x.

Oblast 1: Ohraničená shora křivkou $y = 3$ a zdola křivkou $y = 2\sqrt{x}$, pro $x \in [0, 1]$. Obsah této oblasti je dán integrálem:

$$S_1 = \int_1^{\frac{9}{4}} (3 - 2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \left[3x - \frac{4x^{3/2}}{3}\right]_1^{\frac{9}{4}} = \frac{15}{4} - \frac{19}{6} = \frac{7}{12}.$$

Oblast 2: Ohraničená shora křivkou $y = 3$ a zdola křivkou $y = 3 - x$, pro $x \in \left[1, \frac{9}{4}\right]$. Obsah této oblasti je dán integrálem:

$$S_2 = \int_0^1 (3 - (3 - x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Celkový obsah je tedy

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + \frac{7}{12} = \frac{13}{12}.$$

[7] 2. Nalezněte řešení následující diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = 8\sin^2 x$$

s počátečními podmínkami

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0.$$

Řešení:

Řešení homogenní rovnice:
Nejprve najdeme obecné řešení homogenní rovnice

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0.$$

Cahrakteristická rovncie má tvar

$$\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0 \implies (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 - 1) = 0 \implies \lambda = \pm 1, \pm 2i.$$

Obecné řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x).$$

Partikulární řešení:
Nejdříve upravíme pravou stranu pomocí identity

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \implies 8\sin^2 x = 4 - 4\cos(2x).$$

Rovnice tedy přejde na

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = 4 - 4\cos(2x).$$

Pravá strana má tedy speciální tvar a to konstantu a $\cos(2x)$, které jsou součástí homogenního řešení. Partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = A + x(B\cos(2x) + C\sin(2x)).$$

Spočteme první čtyři derivace

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= B\cos(2x) + C\sin(2x) + x(-2B\sin(2x) + 2C\cos(2x)),\\
y_p''(x) &= -4B\sin(2x) + 4C\cos(2x) + x(-4B\cos(2x) - 4C\sin(2x)),\\
y_p^{(3)}(x) &= -12B\cos(2x) - 12C\sin(2x) + x(8B\sin(2x) - 8C\cos(2x)),\\
y_p^{(4)}(x) &= 32B\sin(2x) - 32C\cos(2x) + x(16B\cos(2x) + 16C\sin(2x))
\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice a úpravách dostaneme

$$\begin{aligned}
4 - 4\cos(2x) &= y_p^{(4)} + 3y_p'' - 4y_p\\
&= 32B\sin(2x) - 32C\cos(2x) + x(16B\cos(2x) + 16C\sin(2x))\\
&\quad + 3\left(-4B\sin(2x) + 4C\cos(2x) + x(-4B\cos(2x) - 4C\sin(2x))\right)\\
&\quad - 4\left(A + x(B\cos(2x) + C\sin(2x))\right)\\
&= 20B\sin(2x) - 20C\cos(2x) - 4A.
\end{aligned}$$

Porovnáním s pravou stranou získáme řešení

$$B = 0, \quad C = \frac{1}{5}, \quad A = -1$$

a tedy

$$y_p(x) = -1 + \frac{1}{5} x \sin(2x).$$

Celkové řešení:
Obecné řešení má tedy tvar

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x) - 1 + \frac{1}{5} x \sin(2x)$$

a konstanty určíme pomocí počátečních podmínek. Spočteme první tři derivace

$$\begin{aligned}
y'(x) &= C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 2C_3 \sin(2x) + 2C_4 \cos(2x) + \frac{1}{5} \sin(2x) + \frac{2}{5} x \cos(2x), \\
y''(x) &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4C_3 \cos(2x) - 4C_4 \sin(2x) + \frac{4}{5} \cos(2x) - \frac{4}{5} x \sin(2x), \\
y'''(x) &= C_1 e^x - C_2 e^{-x} + 8C_3 \sin(2x) - 8C_4 \cos(2x) - \frac{12}{5} \sin(2x) - \frac{8}{5} x \cos(2x),
\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
y(0) &= C_1 + C_2 + C_3 - 1 = 0 \\
y'(0) &= C_1 - C_2 + 2C_4 = 0 \\
y''(0) &= C_1 + C_2 - 4C_3 + \frac{4}{5} = 0 \\
y^{(3)}(0) &= C_1 - C_2 - 8C_4 = 0
\end{aligned}$$

Tato soustava se dá rychle vyřešit. Druhá a čtvrtá rovice dává $C_4 = 0$. První a třetí rovnice vede k $C_3 = \frac{9}{25}$. Zbytek už snadno dořešíme $C_1 = C_2 = (1 - C_3)/2 = 8/25$. Kompletní řešení je tedy

$$\boxed{y(x) = \frac{8}{25} e^x + \frac{8}{25} e^{-x} + \frac{9}{25} \cos(2x) + \frac{x}{5} \sin(2x) - 1}$$

[4] 3. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^n}{2^n},$$

pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která řada konverguje.

Řešení:

Označme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^n}{2^n}$$

Jedná se o mocninou řadu. Určíme poloměr konvergnece.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{2^n}\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Poloměr konvergence je tedy $R = 2$. Pro $|x| < R$ tedy řada konverguje absolutně a můžeme ji **integrovat a derivovat** člen po členu. Pro $x = \pm 2$ řada nekonverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence.

Pro $x \in (-R, R)$ máme

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}x^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n\right)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n\right)' \\ &= -x\left(\frac{x}{2+x}\right)' = -\frac{2x}{(2+x)^2}. \end{aligned}$$

[7] 4. Uvažujte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou jako

$$f(x, y) = (x^4 + Ay^4)e^{-x^4-y^4}.$$

kde $A \in \mathbb{R}$ je zadaný parametr. Najděte všechny globální extrémy funkce f.

Bonusové 3 body lze získat za určení všech lokálních extrémů a sedlových bodů funkce f.

Řešení:

Parciální derivace prvního řádu:
Parciální derivace prvního řádu jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3(1 - x^4 - Ay^4)e^{-x^4-y^4},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3(A - x^4 - Ay^4)e^{-x^4-y^4}$$

Kritické body:
Hledáme hodnoty (x, y), kde $\partial_x f = 0$ a $\partial_y f = 0$. Musí být splněny podmínky

- buď $x = 0$, nebo $1 - x^4 - Ay^4 = 0$
- buď $y = 0$, nebo $A - x^4 - Ay^4 = 0$

V obou případech máme dvě možnosti, coz vede k následujícímu:

- Pokud $x = y = 0$, pak je v obou rovnicích splněna první podmínka a tedy $(0, 0)$ je kritický bod pro libovolné A.
- Pokud $y = 0$ a $x \neq 0$, potom musí platit $0 = 1 - x^4 - Ay^4 = 1 - x^4$, a tedy $x = \pm 1$ a tedy $(\pm 1, 0)$ je kritický bod pro libovolné A.
- Pokud $x = 0$ a $y \neq 0$, potom musí platit $0 = A - x^4 - Ay^4 = A(1 - y^4)$, a tedy buď $y = \pm 1$ nebo $A = 0$ a tedy a $(0, \pm 1)$ je kritický bod pro libovolné A, a pokud $A = 0$, pak $(0, y)$ je kritický bod pro každé y.
- Pokud $x \neq 0$ a $y \neq 0$, potom musí platit $0 = A - x^4 - Ay^4 = 1 - x^4 - Ay^4$. Tyto rovnice jsou řešitelné jedině pokud $A = 1$. Potom tedy pro $A = 1$ jsou kritické body ležící na křivce $x^4 + y^4 = 1$.

Charakteristika extrémů:
Nejdříve není těžké si uvědomit, že f je omezená funkce. Vskutku, přechodem k polárním souřadnicím získáme

$$|f(x, y)| \leq (1+|A|)(x^4+y^4)e^{-(x^4+y^4)} \leq (1+|A|)(x^2+y^2)^2 e^{-\frac{(x^2+y^2)^2}{2}} \leq (1+|A|)r^4 e^{-\frac{r^4}{2}}$$

a vidíme, že funkce vpravo je omezená. Navíc platí $\lim_{r\to\infty} r^4 e^{-\frac{r^4}{2}} = 0$ a proto pro $|(x, y)| \to \infty$ funkce f konverguje k nule. Navíc máme $f(0, 0) = 0$ a f je spojitá a omezená, musí tedy nabývat globálních extrémů. Vyčísleme hodnoty f v podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ f(\pm 1,0) &= e^{-1}, \\ f(0,\pm 1) &= Ae^{-1}, \\ f(0,y) &= 0 && \text{pro } A=0, \\ f(x,y) &= e^{-1} && \text{pro } A=1 \quad \text{a } x^4+y^4=1. \end{aligned}$$

Nyní stačí jen všechny hodnoty porovnat a získat globální minimum m a globální maximum M:

- $A = 0$ - V tomto případě je funkce nezáporná a evidentně tedy nabývá globálního minima $m = 0$ ve všech bodech $(0, y)$. Protože funkce musí nabýt svého maxima, jediná možnost je pak body $(\pm 1, 0)$ a $M = e^{-1}$.
- $A \in (0, 1)$ - V tomto případě je funkce nezáporná a evidentně tedy nabývá globálního minima $m = 0$ v bodě $(0, 0)$. Protože funkce musí nabýt svého maxima, provnáním všech hodnot vidíme, že jediná možnost je $M = e^{-1}$ a nabývá se v bodech $(\pm 1, 0)$ (funkční hodnota je zde větší než v bodech $(0, \pm 1)$.
- $A = 1$ - V tomto případě je funkce nezáporná a evidentně tedy nabývá globálního minima $m = 0$ v bodě $(0, 0)$. Protože funkce musí nabýt svého maxima, jediná možnost je pak body (x, y) splňující $x^4 + y^4 = 1$, což jsou body maxima $M = e^{-1}$.
- $A > 1$ - V tomto případě je funkce nezáporná a evidentně tedy nabývá globálního minima $m = 0$ v bodě $(0, 0)$. Protože funkce musí nabýt svého maxima, jediná možnost je pak body $(0, \pm 1)$ (funkční hodnota je zde větší než v bodech $(\pm 1, 0)$) a maximum $M = Ae^{-1}$.
- $A < 0$ - Protože funkce musí nabýt svého maxima i minima (nabývá kladných i záporných hodnot a v nekonečnu konerguje k nule), jediná možnost je pak že body $(0, \pm 1)$ jsou body globálního minima $m = Ae^{-1}$ a body $(\pm 1, 0)$ jsou body globálního maxima $M = e^{-1}$.

Bonusová část

Parciální derivac druhého řádu:
Parciální derivace druhého řádu jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 4x^2 e^{-x^4-y^4}\left(3(1-x^4-Ay^4) - 4x^4 - 4x^4(1-x^4-Ay^4)\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 4y^2 e^{-x^4-y^4}\left(3(A-x^4-Ay^4) - 4Ay^4 - 4y^4(A-x^4-Ay^4)\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -16x^3y^3 e^{-x^4-y^4}\left(A+1-x^4-Ay^4\right). \end{aligned}$$

Hessova matice a klasifikace:
O definitnosti Hessovy matice nerozhoduje funkce $4e^{-x^4-y^4}$, proto jí vytkneme. Zajímá

nás tedy matice M definovaná jako

$$\begin{aligned} M &= \frac{e^{x^4+y^4}}{4} H \\ &= \begin{pmatrix} x^2\left((3-4x^4)(1-x^4-Ay^4)-4x^4\right) & -4x^3y^3\left(A+1-x^4-Ay^4\right) \\ -4x^3y^3\left(A+1-x^4-Ay^4\right) & y^2\left((3-4y^4)(A-x^4-Ay^4)-4Ay^4\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Postupně do Hessovy matice dosadíme všechny body podezřelé z extrému. Začneme s těmi, které jsou podezřelé bez ohledu na hodnotu A.

$$\begin{aligned} M(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M(\pm 1,0) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M(0,\pm 1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vidíme, že ani v jedné možnosti nemůžeme s jistotou určit extrém, protože matice jsou přinejlepším semidefinitní. V prvním případě nevíme nic, v druhém případě víme, že to není bod minima, ale může být sedlový bod i bod maxima, ve třetím případě závisí na znaménku A a jsme buď ve stejném situaci jako před tím nebo zcela opačné.

Ještě máme daší podezřelé body pro speciální hodnoty A. Pro $A=0$ jsou to body $(0,y)$ a pro $A=1$ jsou to body spňující $x^4+y^4=1$. Pro M máme

$$\begin{aligned} M(0,y) &\overset{A=0}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M(x,y) &\overset{A=1;x^4+y^4=1}{=} \begin{pmatrix} -4x^6 & -4x^3y^3 \\ -4x^3y^3 & -4y^6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V prvním případě tedy nemůžeme říci nic, v druhém případě je matice negativně semidefinitní a tedy nemůže jít o bod minima, ale může to být bod maxima nebo sedlový bod.

Z úvah o globálních extrémech máme už některé body vyřešené (je v nich globální extrém) a zbývá diskutovat bod $(0,0)$ pro $A<0$, body $(0,\pm 1)$ pro $A \in (0,1)$ a body $(\pm 1, 0)$ pro $A>1$.

- **Bod** $(0,0)$ **a** $A<0$**:** Máme

  $$f(0,y) < 0 = f(0,0) < f(x,0)$$

  pro všechna $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Bod $(0,0)$ je tedy pro $A<0$ sedlový bod.

- **Pro** $A \in (0,1)$ **a body** $(0,\pm 1)$**:** Upravme

  $$f(x,y) = (x^4+Ay^4)e^{-x^4-y^4} = A(x^4+y^4)e^{-(x^4+y^4)} + (1-A)x^4e^{-(x^4+y^4)} > f(0,1),$$

  kde poslední nerovnost platí pro jakékoliv $x \neq 0$ a y splňující $x^4+y^4=1$. Na druho stranu, protože

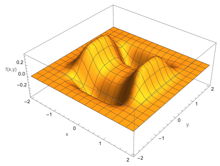
  $$f(0,y) = Ay^4e^{-y^4} =: g(y),$$

má globální ostré maximum v bodech$y = \pm 1$, je zřejmé, že

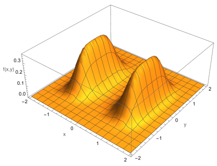
$$f(0, y) < f(0, \pm 1)$$

pro každé $y \neq \pm 1$ a tedy $(0, 1)$ je sedlový bod.

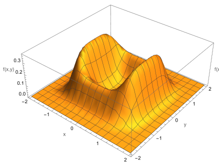
- **Pro** $A > 1$ **a bod** $(\pm 1, 0)$**:** Obdobně jako výše získáme, že $(\pm 1, 0)$ je sedlový bod.



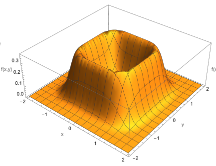
$A = -1$



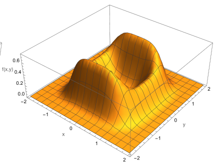
$A = 0$



$A = 0.5$



$A = 1$



$A = 2$

[7] 5. Nechť $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je zadána jako

$$F(x, y, z) = x^2 y - z^2 + e^{x+y+z} - x - (y - 1).$$

- Dokažte, že v okolí bodu $(0, 1, -1)$ lze vyjádřit z jako funkci $z = g(x, y)$.
- Spočítejte parciální derivace $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 1)$ a $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 1)$.
- Rozhodněte, zda má funkce $z = g(x, y)$ v bodě $(0, 1)$ lokální extrém, a pokud ano, určete jeho typ.

Řešení:

Aplikace věty o implicitní funkci: Funkce $F(x, y, z)$ je složeninou hladkých funkcí $\Rightarrow F \in \mathcal{C}^2$. Spočítejme hodnotu funkce a parciální derivaci podle z v bodě $(0, 1, -1)$:

$$F(0, 1, -1) = 0 - 1 + e^{0+1-1} - 0 - 0 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -2z + e^{x+y+z} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, -1) = 2 + 1 = 3 \neq 0.$$

Dle věty o implicitní funkci existuje funkce $z = g(x, y)$, definovaná v okolí bodu $(0, 1)$, taková že $F(x, y, g(x, y)) = 0$ a g má spojité druhé derivace.

Ověření $\nabla g(0, 1) = (0, 0)$:
Ověříme, že gradient funkce g v bodě $(0, 1)$ je nulový a tedy, že jde o bod podezřelý z lokálního extrému. Vyjdeme z rovnosti $F(x, y, g(x, y)) = 0$, kterou zderivujeme podle x a podle y:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F(x, y, g(x, y))}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 y - g(x, y)^2 + e^{x+y+g(x,y)} - x - (y - 1))}{\partial x} \\
&= 2xy + e^{x+y+g(x,y)} + (e^{x+y+g(x,y)} - 2g(x, y)) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - 1 \\
0 &= \frac{\partial F(x, y, g(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 y - g(x, y)^2 + e^{x+y+g(x,y)} - x - (y - 1))}{\partial y} \\
&= x^2 + e^{x+y+g(x,y)} + (e^{x+y+g(x,y)} - 2g(x, y)) \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} - 1
\end{aligned}$$

Dosadíme $(x, y) := (0, 1)$ a $g(0, 1) := -1$

$$\begin{aligned}
0 &= e^0 + (e^0 + 2) \frac{\partial g(0, 1)}{\partial x} - 1 = 3 \frac{\partial g(0, 1)}{\partial x} \implies \frac{\partial g(0, 1)}{\partial x} = 0 \\
0 &= e^0 + (e^0 + 2) \frac{\partial g(0, 1)}{\partial y} - 1 = 3 \frac{\partial g(0, 1)}{\partial y} \implies \frac{\partial g(0, 1)}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

a tedy bod $(0, 1)$ může být bodem lokálního extrému.

Druhé parciální derivace a Hessova matice:
Vyčíslíme Hessovu matici. Zderivujeme výše odvozené formulky dosadíme bod $(0, 1)$ a

použijeme i vztah $\nabla g(0,1) = (0,0)$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + e^{x+y+g(x,y)} + (e^{x+y+g(x,y)} - 2g(x,y))\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - 1\right)_{(0,1)} \\
&= 3 + 3\frac{\partial^2 g(0,1)}{\partial x^2} \implies \frac{\partial^2 g(0,1)}{\partial x^2} = -1, \\
0 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + e^{x+y+g(x,y)} + (e^{x+y+g(x,y)} - 2g(x,y))\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - 1\right)_{(0,1)} \\
&= 1 + 3\frac{\partial^2 g(0,1)}{\partial x \partial y} \implies \frac{\partial^2 g(0,1)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + e^{x+y+g(x,y)} + (e^{x+y+g(x,y)} - 2g(x,y))\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} - 1\right)_{(0,1)} \\
&= 1 + 3\frac{\partial^2 g(0,1)}{\partial y^2} \implies \frac{\partial^2 g(0,1)}{\partial y^2} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Hessova matice v bodě $(0,1)$ má tedy tvar

$$
\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

což je matice negativně definitní. Funkce $g(x,y)$ má tedy v bodě $(0,1)$ lokální maximum.