L3 Cauchyho úloha pro vlnovou rovnici ve vyšších dimenzích

VLNA.2 Sférické průměry; $d=2,3$.

Zavedeme následující označení:

$$\mathcal{U}(x;t,r) := \fint_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,dS_y := \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,dS_y$$

$$\mathcal{U}_0(x;r) := \fint_{\partial B_r(x)} u_0(y)\,dS_y \qquad \mathcal{U}_1(x,r) := \fint_{\partial B_r(x)} u_1(y)\,dS_y$$

Na veličinu $\mathcal{U}$ se budeme dívat jako funkci proměnných $r\in[0,\infty)$ a $t\in(0,\infty)$ parametrizovanou $x\in\mathbb{R}^d$.

Ukážeme, že pokud u chápeme jako řešení vlnové rovnice ve dvou a třech dimenzích, tak $\mathcal{U}$ řeší modifikovanou vlnovou rovnici v $d=1$. Platí:

Lemma Nechť $u\in C^m([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ je řešení $\boxed{\Box u=0,\ u(0,\cdot)=u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot)=u_1}$ v $\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$. Buď $x\in\mathbb{R}^d$ libovolné, pevné.

Pak $\mathcal{U}\in C^m([0,\infty)\times\mathbb{R}^+)$ splňuje

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}\text{Euler-Poisson}\\ \text{-Darbouxovu}\\ \text{rci}\end{pmatrix} & \dfrac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial r^2}-\dfrac{d-1}{r}\dfrac{\partial\mathcal{U}}{\partial r}=0 \quad \text{v } \overset{t}{(0,\infty)}\times\overset{r}{(0,\infty)} \\ & \mathcal{U}=\mathcal{U}_0,\ \dfrac{\partial\mathcal{U}}{\partial t}=\mathcal{U}_1 \quad \text{v } \{0\}\times(0,\infty)\end{cases}$$

(Dk) Nejdříve pomocný výpočet. Označme $\Psi(r) := \fint_{\partial B_r(x)}\psi(y)\,dS_y$.

Substitucí $z=\frac{y-x}{r}$ dostáváme $\Psi(r)=\fint_{\partial B_1(0)}\psi(x+rz)\,dS_z$.

Odsud plyne

$$\Psi'(r)=\fint_{\partial B_1(0)}\nabla\psi(x+rz)\cdot z\,dS_z = \fint_{\partial B_r(x)}\nabla\psi(y)\cdot\underbrace{\frac{y-x}{r}}_{\vec{n}}\,dS_y$$

$\vec{n}$ vnější jednotková normála

$$=\fint_{\partial B_r(x)}\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\,dS_y \overset{\text{Gauss}}{=} \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{B_r(x)}\Delta\psi(y)\,dy = \frac{r}{d}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}\Delta\psi(y)\,dy$$

Nyní za Ψ vezmeme $\mathcal{U}$.

Tak $\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial r}(x;t,r)=\frac{r}{d}\fint_{B_r(x)}\Delta u(t,y)\,dy = \frac{r}{d}\fint_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,dy = \frac{1}{d\,\alpha(d)\,r^{d-1}}\int_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,dy$

u řeší $\Box u=0$

Tak $r^{d-1}\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial r}=\frac{1}{d\,\alpha(d)}\int_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dy \underset{\text{„Fubini"}}{=} \frac{1}{d\,\alpha(d)}\int_0^r\left(\int_{\partial B_\rho(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dS_y\right)d\rho$

Nyní

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial r}\right)}_{} \overset{\substack{\text{derivování integr.}\\ \text{dle horní meze}}}{=} \frac{1}{d\,\alpha(d)}\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dS_y = \frac{r^{d-1}}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dS_y = \underbrace{r^{d-1}\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial t^2}}_{}$$

což dává (E-P-D) rci. ∎

Platí: $\boxed{d\,|B_r(x)| = r\,|\partial B_r(x)|}$

$\boxed{\text{Buď } d=3}$ Pak (E-P-D) se redukují pro $\tilde{U} := rU$, $\tilde{U}_0 := rU_0$, $\tilde{U}_1 := rU_1$ na úlohu

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} = 0 \text{ v } \overset{t}{(0,\infty)} \times \overset{r}{(0,\infty)} \\ \tilde{u} = \tilde{u}_0,\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \tilde{u}_1 \text{ v } \{0\} \times (0,\infty) \\ \tilde{u} = 0 \quad \text{na} \quad (0,\infty) \times \{0\} \end{array}\right]$$

Dk $\underline{\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}} = r\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = r\left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right] = r\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 2\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(U + r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \underline{\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2}}$ ☐

Povšimněme si také, že $\frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial r^2}(0) = 0$

Pokud $\boxed{0 \le r \le t}$ — zajímá nás jen tento další vzoreček pro pologrupu, neboť budeme studovat limitu $r \to 0+$.

$$\tilde{u}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{U}_0(r+t) - \tilde{U}_0(t-r) + \int_{t-r}^{t+r} \tilde{u}_1(y)\,dy\right]$$

Protože

$$u(t,x) = \lim_{r\to 0+} \frac{\tilde{u}(x;r,t)}{r} = \lim_{r\to 0}\left[\frac{\tilde{u}_0(\cancel{t+r}) - \tilde{u}_0(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\tilde{u}_1(y)\,dy\right]$$

$$= \tilde{u}_0'(t) + \tilde{u}_1(t),$$

tak

$$\boxed{\underline{\underline{u(t,x)}} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(t \underbrace{\fint_{\partial B_t(x)} u_0(y)\,dS_y}_{=\, \fint_{\partial B_1(0)} u_0(x+tz)\,dS_z}\Big) + t\fint_{\partial B_t(x)} u_1(y)\,dS_y}$$

$$= t\fint_{\partial B_1(0)} \nabla u_0(x+tz)\cdot z\,dS_z + \fint_{\partial B_1(0)} u_0(x+tz)\,dS_z + t\fint_{\partial B_t(x)} u_1(y)\,dS_y$$

$$= \fint_{\partial B_t(x)} u_0(y) + t u_1(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x)\,dS_y \qquad \begin{array}{l} x\in\mathbb{R}^3 \\ t>0 \end{array}$$

[Kirchhoffův vzoreček] pro řešení Cauchyho úlohy pro vlnovou rovnici ve třech dimenzích.

Věta 2. Je-li $d=3$, pak řešení (□) je dáno Kirchhoffovým vzorečkem, které je smysluplný (vede na spojitou fci) pokud $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ a $u_1 \in C(\mathbb{R}^3)$

Jsou-li $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ a $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$, pak řešení (□), dané Kirchhoffovým vzorcem, je klasické řešení.

$\boxed{\text{Huygensův princip}}$ =
slabší verze

- vyjádření principu konečného šíření signálu
- Toto platí v libovolné dimenzi

POZOROVÁNÍ Dle d'Alembertovy vzorce závisí u jen na hodnotách u_0, zatímco v Kirchhoffově vzorcu u závisí nejen na u_0, ale i na jeho derivacích. Tato závislost na derivaci u_0 je spojena s jevem, který se nazývá "zesílení/zaostření singularit" (focusing singularity). Jev ilustrujeme na speciální případě:

$$x=0, \quad u_1 \equiv 0, \quad u_0 = u_0(|x|)$$

Pak z Kirchhoffova vzorce plyne

$$u(t,0) = \fint_{|x|=t} U_0(|y|) + \nabla u_0(|y|)\cdot y \, dy$$

$$= U_0(t) + U_0'(t)t = \left(t\,U_0(t)\right)'$$

Buď $U_0(s) = \begin{cases} (1-|s|)^{1/2} & |s|\le 1 \\ 0 & |s|>1 \end{cases}$

Pak

$$u(t,0) = (1-t)^{1/2} - \frac{t}{2(1-t)^{1/2}} \xrightarrow[t\to 1-]{} -\infty$$

zatímco na počátku

$$u(0,0)=1 \quad \text{a} \quad 0 \le u(0,x) \le 1 \quad \forall x\in(-1,1)$$

$$\text{a} \quad u(0,x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus(-1,1).$$

Tedy libovolně malá výchylka na počátku může vést ke singularitě v $t=1$. Tento jev se nazývá focusing singularities

$\blacksquare$

Buď $\boxed{d=2}$. Nyní nelze bohužel využít (E-P-D) rci.
Použijeme jinou metodu: redukce dimense či sestupu (metodu / metoda). Budeme chápat dvoudimensionální problém jako speciální případ ve 3 dimensích.

Pokud u řeší úlohu v $d=2$, pak označme

$$\bar{u}(t, x_1, x_2, x_3) := u(t, x_1, x_2)$$
$$\bar{u}_0(x_1, x_2, x_3) := u_0(x_1, x_2)$$
$$\bar{u}_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2).$$

Ukážeme, že z Kirchhoffova vzorce lze odvodit

$$(P_0)\qquad u(t, x) = \frac{1}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{t u_0(y) + t^2 u_1(y) + t \nabla u_0(y) \cdot (y-x)}{\left(t^2 - |y-x|^2\right)^{1/2}}$$

(x_1, x_2)

což je Poissonův vzorec pro řeš. Cauchyho úlohy pro vlnovou rovnici ve dvou dimensích.

Ještě než formulku (P_0) odvodíme, všimněme si, že:

Je-li $d=3$, pak u_0, u_1 v x mají vliv na řešení jen na hranici $\{(y,t) \mid t>0, |x-y|=t\}$ kuželu $C := \{(y,t);\ t>0,\ |x-y|<t\}$.
Je-li však $d=2$, pak u_0, u_1 ovlivňují u v celém kuželi.

Tento princip, tzv. Huygensův princip, se týká obecně sudých a lichých dimenzí. Princip říká, že porucha či signál, který vznikl v x, se šíří v lichých dimenzích po ostré vlnové ~~xxxx~~ frontě, ale v sudých dimenzích ovlivňují řešení i poté co vedoucí hrana té vlnové fronty prošla bodem x. Pro jistou představu / analogii uvažme vlny vzniklé hozeným kamenem do mělké vody. (Nevýhodou této analogie je skutečnost, že nemí lineární rovnice popisující mělkou vodu vlnová rovnice.) *)

*) Důkaz (odvození vzorečku) v lichých dimenzích opět vychází z Euler-Darboux-Poisson rce, a v sudých se použije metoda sestupu. Pozor, situace $d=1$ je specifická (viz d'Alembertův vzoreček).

$\boxed{\text{Odvození } (P_0)}$ Předpokládáme, že $u(t,x) = u(t,x_1,x_2)$ řeší

$$(V_2)\quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \text{ v } (0,T)\times\mathbb{R}^2 \quad \text{s} \quad u(0,x) = u_0(x_1,x_2),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x_1,x_2)\right]$$

Pak $\bar{u}(t,x_1,x_2,x_3) := u(t,x_1,x_2)$ řeší/splňuje ——— || ——— ||

$$(V_3)\quad \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_3^2} = 0 \text{ v } (0,T)\times\mathbb{R}^3 \quad \text{s} \quad \bar{u}(0,\cdot) = \bar{u}_0(x_1,x_2,x_3),\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(0,\cdot) = \bar{u}_1(x_1,x_2,x_3)\right]$$

Řešení (V_3) je dáno Kirchhoffovým vzorcem (viz str PDR|9), kde užijeme značení

- $\bar{x} := (x_1,x_2,0)$
- $\bar{B}_t(\bar{x}) = \{y\in\mathbb{R}^3;\ |y-\bar{x}|<t\}$

(místo 0 ve 3. složce bychom mohli vzít jakékoliv pevné $a\in\mathbb{R}$)

pruh nad B odlišuje trojrozměrnou kouli od dvourozměrné; zde tedy NEOZNAČUJE průměr.

Dostáváme

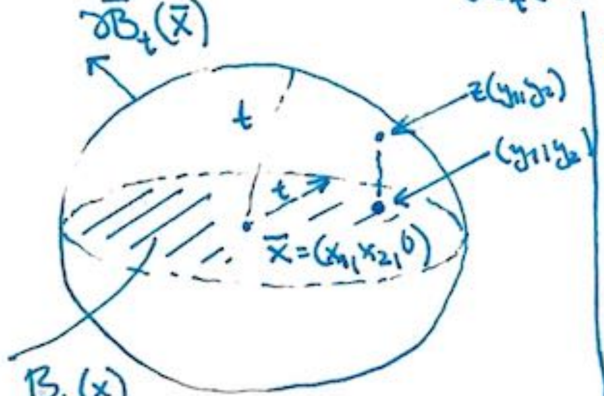
$$(*)\quad u(t,x_1,x_2) = \bar{u}(t,x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial\bar{B}_t(\bar{x})} \bar{u}_0(y)\,dS_y\right) + t\fint_{\partial\bar{B}_t(\bar{x})} \bar{u}_1(y)\,dS_y$$

zbývá upravit pravou stranu (z věty o jednoznačnosti – viz dole – plyne, že takto nalezené řešení je jediné možné (v dané třídě))

K úpravě $(*)$ potřebujeme spočítat

$$I := \fint_{\partial\bar{B}_t(\bar{x})} \psi(y)\,dS_y$$

kde $\psi = \bar{u}_0$ nebo $\bar{u}_1$, tzn. $\psi = \psi(y_1,y_2)$



plošný integrál 1. druhu, kde plocha $\left[(y_1,y_2)\in B_t(x) \longmapsto (y_1,y_2,z(y_1,y_2))\right]$ je dána rovnicí

$$z^2 + (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 = t^2,$$

což dává

$$z = \pm\sqrt{t^2 - \underbrace{|y-x|^2}_{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}}$$

+ ... horní polosféra

− ... dolní —||—

Tedy

$$I = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(x)} \psi(y)\, dS_y \overset{\text{parametrizace horní a dolní semisféry}}{=} \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B_t(x)} \psi(y)\, |\vec{n}(y)|\, dy$$

kde $|\vec{n}|$ lze spočítat z tečných vektorů (horní semisféry) $\vec{t}_1 = \left(1, 0, \frac{-(y_1 - x_1)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\right)$, $\vec{t}_2 = \left(0, 1, \frac{-(y_2 - x_2)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\right)$

např. pomocí Gramovy matice

$$G = \begin{pmatrix} |\vec{t}_1|^2 & \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 \\ \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 & |\vec{t}_2|^2 \end{pmatrix} \overset{\text{SAMI}}{\Rightarrow} \det G = \frac{t^2}{t^2 - |y-x|^2},$$

neboť $|\vec{n}| = \sqrt{\det G} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}$.

Tedy

$$I = \frac{1}{2\pi t^2} \int_{B_t(x)} \psi(y) \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{B_1(0)} \frac{\psi(x + t\xi)}{\sqrt{1 - |\xi|^2}}\, d\xi$$

$B_t(x)$ dvourozměrná koule

$\xi := \frac{y-x}{t}$

$y = x + t\xi \quad : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\det \nabla y = t^2$

Vrátíme-li se ke vztahu (*) (str. PDR/11), dostáváme, po dosazení,

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \fint_{B_1(0)} \frac{u_0(x + t\xi) + \nabla u_0(x+t\xi) \cdot t\xi + t u_1(x + t\xi)}{\sqrt{1 - |\xi|^2}}\, d\xi$$

což po zpětné substituci

$$y = x + t\xi \iff t\xi = y - x$$

dává

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{t u_0(y) + t \nabla u_0(y) \cdot (y-x) + t^2 u_1(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy,$$

což je vztah (P_0). Q.E.D.

L4 VĚTY O JEDNOZNAČNOSTI A ENERGETICKÉ ODHADY PRO VLNOVOU ROVNICI

Důležité v mat. analýze rovnic jsou energetické metody. PDR/13

Buď u řešení Cauchyho či počátečně a okrajové úlohy pro vlnový operátor. Formálně vynásobme $\Box u = 0$ (či $\Box u = f$) fcí $\frac{\partial u}{\partial t}$ a proveďme integraci přes Ω.

Pak
$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_2^2$$

a také
$$-\int_\Omega \Delta u \frac{\partial u}{\partial t}\,dx \underset{\text{per partes}}{=} +\int_\Omega \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla u\,dx - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx}_{=0}$$

0 pokud $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ či $u = 0$ nebo $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ či pokud u klesá v ∞

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2$$

Tedy
$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2\right) = 0$$

$\int_0^t ds$
$$\boxed{\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 = \|u_1\|_2^2 + \|\nabla u_0\|_2^2}$$

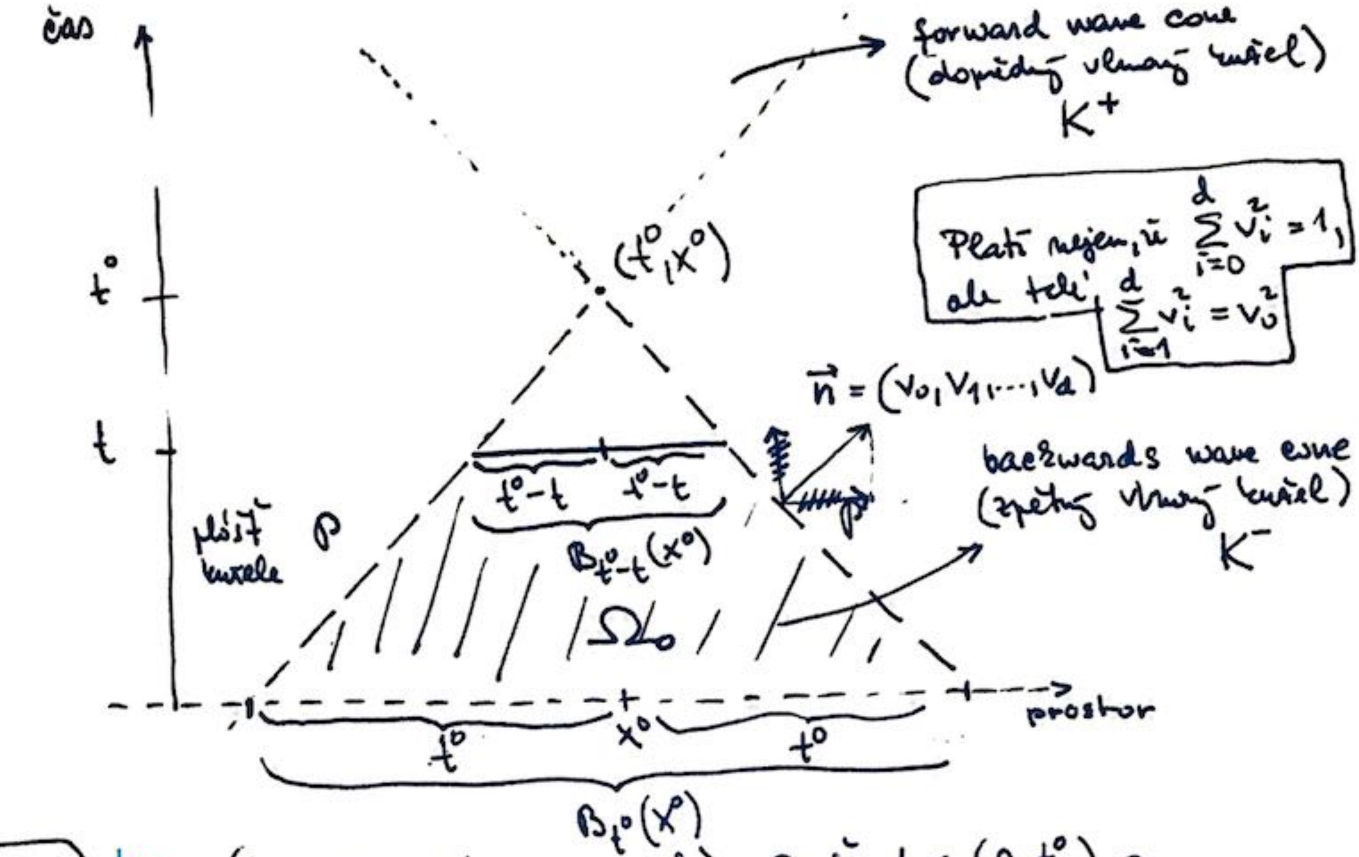
Věta 3. (O jednoznačnosti klasického řešení počátečně a okraj. úlohy pro $\Box u = f$)
Existuje nejvýše jedno klasické řešení u (tzn. $u \in C^2(\overline{Q_T})$) splňující spojité poč. podmínky a okrajové podmínky pro úlohu:

$$\boxed{\begin{aligned} \Box u &= f \quad \text{v } Q_T := (0,T)\times\Omega \\ u = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t} &= u_1 \quad \text{v } \{0\}\times\Omega \\ u &= a \quad \text{v } \Sigma_T := (0,T)\times\partial\Omega \end{aligned}} \qquad (W_{IBVP})$$

Dk Nechť jsou řešení dvě: u a v splňující (W_{IBVP}).
Pak $w := u - v$ splňuje $\boxed{\Box w = 0 \text{ v } Q_T,\ w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ v } \Omega,\ w = 0 \text{ na } \Sigma_T.}$
Násobme $\Box w$ fcí w, $\int_\Omega$ a jako výše dostaneme pro všechna $t > 0$:
$$\left\|\frac{\partial w}{\partial t}(t)\right\|_2^2 + \|\nabla w\|_2^2 = 0 \quad \text{neboli} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_d}\right) = 0$$

tedy $w \equiv$ konstanta a protože $w = 0$ na Σ_T tak

$w \equiv 0$. Tedy $u = v$ v Q_T a věta je dokázána. ☒



Věta 4 (energetická nerovnost) Buď $t \in (0, t^0)$ a $B_{t^0}(x^0)$, $B_{t^0-t}(x^0)$ jako na obrázku. Nechť $u \in C^2(\overline{\Omega_0})$ je řešením vlnové rovnice ($\Box u = 0$) (resp. Cauchyho či IBVP) s tím, že $\overline{\Omega_0} \subset Q_T$ (resp. $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$). Pak

$$\boxed{(EN) \quad \int_{B_{t^0-t}(x^0)} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |\nabla u|^2\right)\Big|_{(t^0-t,x)} dx \le \int_{B_{t^0}(x^0)} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |\nabla u|^2\right)\Big|_{(t^0,x)} dx}$$

Dk) Opět násobme $\Box u = 0$ (ZDROJE f JSOU NULOVÉ) fcí u a integrujme přes časoprostorovou množinu Ω_0 s hranicí $\partial\Omega_0 = B_{t^0}(x^0) \cup B_{t^0-t}(x^0) \cup P$. Máme

$$0 = \int_{\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u\right) dx\,ds = \int_{\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t} - \operatorname{div}(\nabla u)\right) dx\,ds$$

$$= \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \operatorname{div}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\nabla u\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2\right) dx\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{B_{t^0-t}(x^0)} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |\nabla u|^2\right) dx - \frac{1}{2}\int_{B_{t^0}(x^0)} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |\nabla u|^2\right) dx$$

$$+ \int_P \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) v_0 - \frac{\partial u}{\partial t}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i \, dS_{tx} =: I_1 + I_2 + I_3.$$

Důkaz bude hotov pokud ukážeme, že $I_3 \ge 0$.

Avšak $(v_0 > 0)$

$$I_3 = \frac{1}{2v_0} \int_P \left(\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + |\nabla u|^2 \right) v_0^2 - 2 \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i v_0 \right) dS_{x,t}$$

$$= \frac{1}{2v_0} \int_P \sum_{i=1}^{d} \left(v_i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x_i} v_0 \right)^2 dS_{t,x} \geq 0$$

kde jsme využili skutečnosti, že $\sum_{i=1}^{d} v_i^2 = v_0^2$. ∎

<u>Důsledek</u> Je-li $u \in C^2(\overline{K^-})$ a $u = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}$ v $B_{t^0}(x^0)$.
Pak $u \equiv 0$ v K^-.