

KOMPACTNÍ MNOŽINY V $C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$
kompaktní

Víme a) $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní $\Leftrightarrow K$ je omezená a uzavřená

Heine-Borelovská věta b) $(X, \|\cdot\|)$ Banachův
 $\overline{B_1(0)}^{\|\cdot\|_X}$ je kompaktní $\Leftrightarrow \dim X < +\infty$

Speciálně: Jednotková koule v ℓ_2 není kompaktní:

nebo je posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_2$, kde

$$x_n = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-tí místo}}}{1}, 0, \dots)$$

vybrat konvergentní, neboť $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \neq n_2$

$$\|x_{n_1} - x_{n_2}\|_{\ell_2} = \sqrt{2}$$

c) $\boxed{C(K)}$... prostor spojitých funkcí na K

↓ obsahuje $C^\infty(K)$... prostor funkcí, které mají spojitě derivace libovolného řádu

→ obsahuje polynomy všech řádů

$$1, x, x^2, \dots, x^2, \dots \quad (\text{když } K \subset \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim C(K) = +\infty}$$

Otázka: Jaké jsou kompaktní množiny v $C(K)$?

Odpověď: Arzelà-Ascoliho věta.

Věta 10.10 Arzela-Ascoli aueb kritérium kompaktnosti v $C(K)$

Podí $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní. Pak platí:

$$\boxed{A \subset C(K)^m = \underbrace{C(K) \times \dots \times C(K)}_{m\text{-krát}} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{je } \underline{\text{prekompaktní}} \end{array}}$$

$$\bullet \exists K > 0 \sup_{f \in A} \sup_{x \in K} |f(x)| \leq L$$

slejná omezená
[omezenost A]

$$\bullet \sup_{f \in A} \sup_{x \in K} |f(x+h) - f(x)| \xrightarrow[h \rightarrow 0]{\substack{\text{pro } |h| \rightarrow 0 \\ \text{na } K}} 0$$

Formulace pro posloupnosti Necht $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([a,b])$ splňují

(P1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou slejně omezená $\exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [a,b] |f_n(x)| \leq K$

(P2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou slejně slejnoměrně spojité tzn.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x', x'' \in [a,b] |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Pak $\exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}$, která konverguje v $C([a,b])$.

(Dě) Uvaž racionalní čísla v (a,b) . Víme, u každé spočetné množiny. Seřadíme je do posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Nyní konstruuje:

• $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, existuje $\{f_{1,n}(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ která konverguje

• $\{f_{1,n}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ ———, ——— $\{f_{2,n}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ ———

⋮

⋮

⋮

Uvažme posloupnost $\{f_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$ (Cantorova diagonalizace)

Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{i,n}(x_k)$ existuje pro $\forall k \in \mathbb{N}$.

Zbývá ukázat, že $f_{i,n}$ je Cauchyovská v supremu normě, tzn. splňuje B-C podmínku slejnoměrné konvergence.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu najdeme $\delta > 0$ z podmínky (P2)

Pak najdeme l racionalních čísel $y_i, i=1, \dots, l$, tak, u

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^l (y_i - \delta, y_i + \delta).$$

Nyní pro každé $t \in [a, b]$ existují $y_j : |t - y_j| < \delta$.

Máme

$$|f_{m,m}(t) - f_{m,m}(t)| \leq |f_{m,m}(t) - f_{m,m}(y_j)| + |f_{m,m}(y_j) - f_{m,m}(y_j)|$$

$$+ |f_{m,m}(y_j) - f_{m,m}(t)|$$

$\leq 2\varepsilon$ ne stejné stejnosměrné spojitosti vit (p2).

ne udělat menší než ε
 $\forall m, n \geq N = \max\{N_1, \dots, N_\ell\}$
 (jiné hodnoty y_j)

Kapitola A aritmetické Dirichletova věta (postupující podmínka stejnosměrné konvergence).

Věta 10.11. (Dirichlet)

- $f_n, f \in C([a, b])$
 - $f_n \rightarrow f$ v $[a, b]$
 - $f \leq \dots \leq f_{n+1} \leq f_n \leq \dots \leq f_1$ v $[a, b]$
- $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ v $[a, b]$.

EMNÍ MONOTONIE

(Dě) Uvažování $\psi_n: f_n - f$ a následně přetváření $f_n = \psi_n$,
 ne uvažovat, bez ujm na obecnosti, situaci $f_n \geq 0$ a $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ $\forall n$
 Sporem, když $f_n \not\rightarrow 0$ na $[a, b]$ tak monotonně indexu (n) tak, že
 $\sup_{x \in [a, b]} f_n(x) \geq \varepsilon_0$ existuje $\varepsilon_0 > 0$ a
 Opět uvažujeme jen tuto n a f_n .

Proto $f_n \in C([a, b])$, $\exists x_n \in [a, b]$ $f_n(x_n) \geq \varepsilon_0$.

Ale $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je omezená $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}$ a $x_0 \in [a, b] : x_{n_k} \rightarrow x_0$

Opět přetváření a uvažujeme $f_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0$ a $x_{n_k} \rightarrow x_0$.

Paž

$$0 < \varepsilon_0 \leq f_{n_k}(x_{n_k}) \leq f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_0) + f_{n_k}(x_0)$$

$$\leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_0)| + |f_{n_k}(x_0)|$$

m Afixují tak, aby:

$< \frac{\varepsilon_0}{3}$ je spojitosti již zafixované f_{n_k} a $x_{n_k} \rightarrow x_0$ $< \frac{\varepsilon_0}{3}$ z bodové konvergence

Tedy $\varepsilon_0 \leq \frac{2\varepsilon_0}{3} \Leftrightarrow 3 \leq 2$ $\perp$

