

1) Spočti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ $x \in (0; 2\pi)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$

můžeme použít $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}$ $x \in (0; 2\pi)$
(odvozeno na cvičení)

ŘEŠENÍ: Platí $\left(\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = \left(\frac{\cos(nx)}{n^3}\right)' = -\frac{\sin(nx)}{n}$

Dominenka: Platí $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$

(ukážem platnost) $= \frac{x-\pi}{2}$ 
pro $x \in (0; 2\pi)$

OZNAČ $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n^3}$

$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

VÍM

a) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \Rightarrow$ na $\langle \varepsilon; 2\pi-\varepsilon \rangle$

($\varepsilon \in (0; \pi)$ lib.)
z Dirichleta $\left(\begin{array}{l} \sin(nx) \\ \text{stejně om. část součty na } \langle \varepsilon; 2\pi-\varepsilon \rangle \\ \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \text{ monot.} \end{array} \right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \Rightarrow$ na $\mathbb{R}$ (Weierstrass: $|f_n'(x)| \leq \frac{2}{n^2}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverg.)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Rightarrow$ na $\mathbb{R}$ (Weierstrass: $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konverg.)

Předpoklady věty ze stejnoměrné konvergence
& derivování sum $s(x); s'(x)$ člen po členu
jsou jistě splněny pro $x \in \langle \varepsilon; 2\pi - \varepsilon \rangle$, $\varepsilon \in (0; \pi)$
lib.

VĚTA ŘÍKÁ
Nechť $\tilde{s}_n(x) := \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_m(x)$ konverg. aspoň
pro jedno $x \in I$
Nechť $\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_m'(x) \geq$ na I ↑
daný
interval
Pak $\exists \tilde{s}'(x)$ a platí $\tilde{s}'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_m'(x)$
 $\forall x \in I$

Čili platí  pro $\forall x \in \langle \varepsilon; 2\pi - \varepsilon \rangle$,
protože $\varepsilon \in (0; \pi)$ je lib., platí  pro $\forall x \in (0; 2\pi)$.

$\Rightarrow s''(x) = \frac{x - \pi}{2}$
SKUTEČNĚ

$$s'(x) = \int \frac{x - \pi}{2} dx + C = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + C$$

$$s(x) = \int \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + C \right) dx + D = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + Cx + D$$

pro $\forall x \in (0; 2\pi)$.

Díky stejnoměrné konvergenci sumy $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$
na $\mathbb{R}$ (viz bod © na 1. straně) víme, že
 $s(x)$ je spojitá fce na $\mathbb{R}$

$\Rightarrow s(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + Cx + D$ $\forall x \in \langle 0; 2\pi \rangle$
JISTĚ

KONSTANTY C, D dopočteme např. položením
 $x=0$; $x=\pi$

$$\frac{0^3}{12} - \frac{0^2 \pi}{4} + C \cdot 0 + D = s(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot 0)}{n^3} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{D=0}$$

$$\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^2 \cdot \pi}{4} + C \cdot \pi = s(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot \pi)}{n^3} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{C = -\left(\frac{\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{4}}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{6}}$$

CELKEM Tedy

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6} \quad \forall x \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

DÁLE

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} \bigg|_{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= - \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{4} + \frac{\pi^2 \cdot \frac{\pi}{2}}{6} \right) \\ &= - \frac{\pi^3}{32} \end{aligned}$$