Jonáš Dujava

Termín pro odevzdání: pondělí 13. 12. 2021

1. Nalezněte **radiálně symetrické řešení** rovnice

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 \qquad \text{v } \mathbb{R}^+ \times M,$$

kde $M = \{x \in \mathbb{R}^3, \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$ je mezikoulí. Počáteční podmínky jsou ve tvaru

$$u(0,x) = -\frac{\sin(2\pi|x|)}{|x|}\,,$$
$$u_t(0,x) = 0\,,$$

a okrajové podmínky

$$u - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{pro } |x| = \frac{1}{2} \text{ a } t > 0 \qquad \text{a} \qquad u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{pro } |x| = 1 \text{ a } t > 0\,,$$

kde $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ je derivace ve směru vnější normály n.

Nápověda:

- Řešení u hledejme ve tvaru $u(t,x) = v(t,r)$, kde $r = |x|$. Problém (tj rovnici, okrajové a počáteční podmínky) poté přepišme jako úlohu na úsečce $(\frac{1}{2}, 1)$ pro novou neznámou $w(t,r) := rv(t,r)$.
- Data nové úlohy g **vhodně** (podle typu O.P.) prodlužte (na $\tilde{g}_P$) a proveďte periodizaci (tj. $\tilde{g}_P \star \delta_\Sigma$) a následně využijte vzorec odvozený na cvičeních

$$(w_F \star (\tilde{g}_P \star \delta_\Sigma))(t,r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(w_F)(t, \frac{n}{L})\, c_n\, e^{2\pi i \frac{n}{L} r}\,,$$

kde w_F je fundamentální řešení vlnové rce nové úlohy (v jedné prostorové dimenzi) a Fourierovský koeficient c_n se spočítá následovně

$$c_n = \frac{1}{L}\mathcal{F}(\tilde{g}_P)(\frac{n}{L}) = \frac{1}{L}\langle \tilde{g}_P, e^{-2\pi i \frac{n}{L} r}\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L \tilde{g}_P(r) e^{-2\pi i \frac{n}{L} r}\, dr\,,$$

kde L je perioda (prodloužených) dat a předposlední rovnost chápeme ve smyslu působení distribuce $\tilde{g}_P$ (která může, ale nemusí být regulární, ale má kompaktní nosič) na "testovačku" $e^{-2\pi i \frac{n}{L} r}$ (z níž bychom korektní testovací fci udělali vhodným C^∞ seříznutím vně nosiče $\tilde{g}_P$). Poslední rovnost platí pokud je $\tilde{g}_P$ integrovatelná funkce.

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^+ \times M$$

$\boxed{\text{P.P.}}$
$$u(0,x) = -\frac{\sin(2\pi|x|)}{|x|}, \qquad u_t(0,x) = 0 \qquad \text{v } M$$

$\boxed{\text{O.P.}}$
$$u - \tfrac{1}{2}\, n\cdot\nabla u = 0 \quad \text{pre } |x| = \tfrac{1}{2}\,;\ t > 0$$
$$u + n\cdot\nabla u = 0 \quad \text{pre } |x| = 1\,;\ t > 0$$

$M = \{x \in \mathbb{R}^3;\ \tfrac{1}{2} < \underbrace{|x|}_{r} < 1\}$

$[n = -\vec{e}_r \Rightarrow \vec{n}\cdot\nabla = -\partial_r]$

$[n = +\vec{e}_r \Rightarrow \vec{n}\cdot\nabla = +\partial_r]$

$$(g_{\text{sférické}})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$
$$g \equiv \det g_{ij}$$
$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}\, g^{ij}\, \partial_j u) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r u) + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} u = \frac{1}{r}\partial_r^2(ru) + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} u$$

$$\downarrow\ u(t,x) \equiv v(t,|x|) \equiv v(t,r) \qquad \left[\Delta u = \tfrac{1}{r}\partial_r^2(ru) + 0\right]$$

$$v_{tt} - \tfrac{1}{r}\partial_r^2(rv) = 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^+ \times (\tfrac{1}{2}, 1)$$

$\boxed{\text{P.P.}}$
$$v(0,r) = -\frac{\sin(2\pi r)}{r}, \qquad v_t(0,r) = 0 \qquad \text{v } (\tfrac{1}{2}, 1)$$

$\boxed{\text{O.P.}}$
$$v + \tfrac{1}{2} v_r = 0 \quad \text{pre } r = \tfrac{1}{2}\,;\ t > 0$$
$$u + v_r = 0 \quad \text{pre } r = 1\,;\ t > 0$$

$$\xrightarrow[w_r = \partial_r(rv) = v + rv_r]{w(t,r) \equiv r v(t,r)}$$

$$w_{tt} - w_{rr} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^+ \times (\tfrac{1}{2}, 1)$$

$\boxed{\text{P.P.}}$
$$w(0,r) = -\sin(2\pi r) \equiv g, \qquad w_t(0,r) = 0 \qquad \text{v } (\tfrac{1}{2}, 1)$$

$\boxed{\text{O.P.}}$
$$w_r = 0 \quad \text{pre } r = \tfrac{1}{2}\,;\ t > 0$$
$$w_r = 0 \quad \text{pre } r = 1\,;\ t > 0$$

Máme Neumannove O.P. $\Rightarrow$ chceme previesť „párne predĺženie"

Zhodou okolností naša P.P. je už vhodná na periodizáciu, t.j.

$$\tilde{g}_P \equiv g = -\sin(2\pi r) = |\sin(2\pi r)| \quad \text{na} \quad \left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

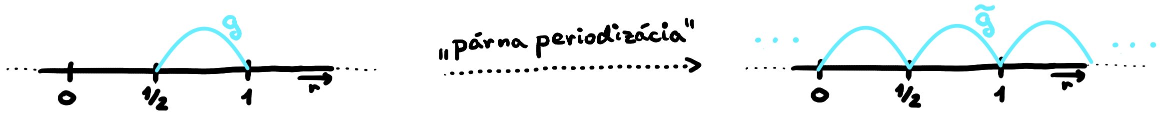
$$\Rightarrow \tilde{g} \equiv \tilde{g}_P * \delta_\Sigma = |\sin(2\pi r)| \quad (\text{perióda } L \equiv \tfrac{1}{2})$$

Veru, platí:

$$\tilde{g}\left(\tfrac{1}{2}+x\right) = \left|\sin 2\pi\left(\tfrac{1}{2}+x\right)\right| = \\ = |\sin 2\pi x| = \ldots = \tilde{g}\left(\tfrac{1}{2}+x\right)$$

Podobne $\tilde{g}(1+x) = \tilde{g}(1-x)$

$\Rightarrow$ $\tilde{g}$ symetrická okolo bodov $r = \frac{1}{2}$ a $r = 1$



Riešenie je teda dané ako $w = \frac{\partial}{\partial t}\left(w_F * \tilde{g}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(w_F * (g * \delta_\Sigma)\right) =$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}[w_F]\left(t, \tfrac{n}{L}\right) c_n e^{2\pi i \frac{n}{L} r}\right] \overset{L=\frac{1}{2}}{=\!=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \cos(4\pi n t)\, c_n e^{4\pi i n r}$$

$$\mathcal{F}[w_F]\left(t, \tfrac{n}{L}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(2\pi \frac{n}{L} t\right)}{2\pi \frac{n}{L}} & n \neq 0 \\ t & n = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[w_F]\left(t, \tfrac{n}{L}\right) = \cos\left(2\pi \tfrac{n}{L} t\right)$$

kde [integračné medze môžeme zameniť z $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \longrightarrow \left[0, \frac{1}{2}\right]$ kvôli periodicite]

$$c_n \equiv \frac{1}{L}\left\langle \tilde{g}_P, e^{-2\pi i \frac{n}{L} r}\right\rangle = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} |\sin 2\pi r|\, e^{-4\pi i n r}\, dr = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2\pi i r} - e^{-2\pi i r}}{i} e^{-4\pi i n r}\, dr =$$

$$= -i\int_0^{\frac{1}{2}} \left(e^{2\pi i(1-2n)r} - e^{-2\pi i(1+2n)r}\right) dr \overset{\substack{1+2n\neq 0 \\ 1-2n\neq 0}}{=\!=} -i\left[\frac{e^{2\pi i(1-2n)r}}{2\pi i(1-2n)} + \frac{e^{-2\pi i(1+2n)r}}{2\pi i(1+2n)}\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1-1}{1-2n} + \frac{-1-1}{1+2n}\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1+2n+1-2n}{1-4n^2} = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1-4n^2} \qquad (c_n = c_{-n})$$

Takže (využili sme paritu)

$$w(t,r) = \frac{2}{\pi}\left[1 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos(4\pi n t)\,\frac{\cos(4\pi n r)}{1-4n^2}\right]$$

a $\left[u(t,x) = \dfrac{w(t,|x|)}{|x|}\right]$ $\Rightarrow$

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi|x|}\left[1 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos(4\pi n t)\,\frac{\cos(4\pi n|x|)}{1-4n^2}\right]$$