Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	8	7	7	7	7	36
Získáno						

[8] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^2\left([1,2]\right) \mid y(1) = \frac{3}{2},\, y'(1) = 3,\, y(2) = \frac{14}{3} + \ln 2,\, y'(2) = \frac{9}{2} \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_1^2 \left(x^3 \left(y''\right)^2 - 12xy \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnic pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gateaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nezáporná.

[7] 2. Buď dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ předpisem

$$f_n(x) =_{\text{def}} \begin{cases} (-1)^n n, & x \in \left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Spočtěte bodovou limitu této posloupnosti a označte ji f. Zjistěte, zda posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f

1. na intervalu $I = (0, K)$, kde $K \in \mathbb{R}^+$ je libovolné pevné číslo,
2. na intervalu $J = (0, +\infty)$.

Přímým výpočtem zjistěte, zda platí

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

aneb zda platí

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

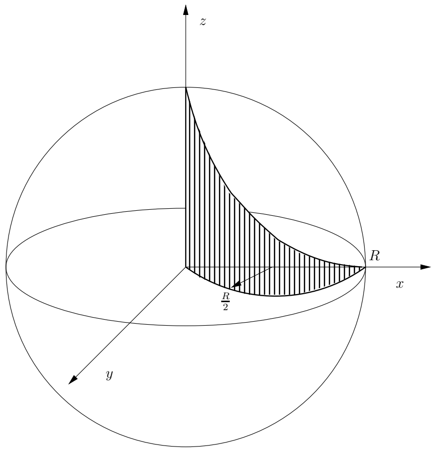
[7] 3. Uvažujte funkci definovanou pro $b \in (0, +\infty)$ integrálem

$$I(b) =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Ukažte, že tato funkce je na svém definičním oboru dvakrát diferencovatelná, a že je pro $b \in (0, +\infty)$ řešením diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}b^2} + I = \frac{1}{b}.$$

[7] 4. Spočtěte plošný obsah plochy S, která je popsána jako část válcové plochy $x^2+y^2=xR$ ležící uvnitř koule $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ a v prvním oktantu ($x>0$, $y>0$, $z>0$), viz Obrázek 1. (Číslo $R \in \mathbb{R}^+$ je parametr.)



Obrázek 1: Plocha S.

[7] 5. Uvažujte funkci $f(x) = \cos x$ na intervalu $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$.

a) Dodefinujte funkci f na $\mathbb{R}$ tak, abyste ji mohli rozvinout do *sinové* Fourierovy řady. Načrtněte graf rozšířené funkce f.

b) Najděte Fourierovu řadu takto rozšířené funkce f.

c) Diskutujte konvergenci nalezené Fourierovy řady. Určete zda Fourierova řada konverguje k funkci f ve smyslu konvergence v L^2, ve smyslu bodové konvergence a ve smyslu stejnoměrné konvergence.

d) Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f.