Domácí úkol č. 8 – Simona Buryšková

1. $\underbrace{\int_0^\pi \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx}_{}$ $=: I(a)$, $F(a,x) := \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}$

integrál zjevně nekonverguje pro $a<-1$ a $a>1$

integrál <u>by mohl</u> konvergovat pro $a \in \langle -1,1 \rangle$

Použijeme větu o záměně derivace a integrálu, <u>předpoklady ověříme na další straně</u>.

Výpočet integrálu:

$$\frac{dI}{da}(a) \overset{(\star)}{=} \int_0^\pi \frac{\partial F}{\partial a}(a,x)\,dx = \int_0^\pi \frac{\cos x}{(1+a\cos x)\cos x}\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{1+a\cos x}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l|l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = u & \text{meze:} \\ \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = du & 0 \to 0 \\ & \pi \to +\infty \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+u^2} & \end{array} \right| = \int_0^\pi \frac{1}{1+a\cos x} \cdot \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{1+a\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{(1+u^2)}\,du = \int_0^\infty \frac{2}{u^2(1-a)+(1+a)}\,du =$$

$$= \frac{2}{1+a}\int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{u^2(1-a)}{1+a}}\,du = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{\frac{u^2(1-a)}{1+a}} \Rightarrow a \in (-1,1) \\ dy \underset{u>0}{\overset{\uparrow}{=}} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,du \ \Big|\ \text{meze } 0\to 0,\ \infty \to \infty \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{1+a}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}} \cdot \frac{1}{1+\frac{u^2(1-a)}{1+a}}\,du = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left[\operatorname{arctg} y\right]_0^\infty \overset{y \geq 0}{=}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}}} \Rightarrow I(a) = \pi\int \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\,da = \pi \arcsin a + C$$

Určíme konstantu: $I(0) = \int_0^\pi \frac{\ln 1}{\cos x}\,dx = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{I(a) = \pi \arcsin a}$

pro $a \in (-1,1)$

Věta (záměna derivace a integrálu)
Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval a $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$. Nechť $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ tž:

(DI1) $\forall \alpha \in I$ je $\Omega \ni x \longmapsto F(\alpha, x)$ měřitelná a exist. množ. $N \subseteq \Omega$ míry nula tž

(DI2) $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ je vlastní na $\Omega \setminus N$

(DI3) $\exists g \in L(\Omega)$ $\forall \alpha \in I$: $\left|\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right| \leq g$ s.v. na Ω

(DI4) $\exists \alpha_0 \in I$: $\Omega \ni x \longrightarrow F(\alpha_0, x) \in L(\Omega)$

Pak

1) $\forall \alpha \in I$ je $\Omega \ni x \to F(\alpha, x) \in L(\Omega)$ a

2) $\frac{dI}{d\alpha}(\alpha) = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, dx$, kde $I(\alpha) = \int_\Omega F(\alpha, x)\,dx$

Ověření předpokladů:

(DI1) je splněn, neboť $F(a,x) = \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}$ je spojitá fce pro $x \in (0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ a bod $\{\frac{\pi}{2}\}$ je množina míry nula, tedy F je $\forall a \in (-1,1)$ měřitelná

(DI2) je splněn, neboť $\forall a \in (-1,1)$ $\frac{\partial F}{\partial a}(a) = \frac{1}{1+a\cos x}$ je na $(0,\pi)$ vlastní

(DI3):

- Pro $|a| \leq a_0 < 1$, $x \in (0,\pi)$

$$0 < \left|\frac{\partial F}{\partial a}(a,x)\right| = \left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| \underset{\substack{|\cos x| \leq 1 \text{ na } \langle 0,\pi\rangle \\ |a| \leq a_0}}{<} \frac{1}{1-a_0} =: g, \quad \int_0^\pi \frac{1}{1-a_0}\,dx = \frac{\pi}{1-a_0}$$

$$\Rightarrow g \in L((0,\pi))$$

(DI4): pro $a_0 = 0$ je $\int_0^\pi \frac{\ln(1)}{\cos x}\,dx = 0 \to$ (DI4) splněn.

Tedy platí rovnost (☆) na předchozí straně, tedy lze provést záměnu $\int$ a derivace a $I(a) = \pi \arcsin(a)$ $\forall a \in (-1,1)$.

Vyšetříme zvlášť případy $a = \pm 1$:

Pokud ukážu, že $\int_0^\pi \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx$ je spojitý pro $a \in \langle -1, 1\rangle$, bude jasné že $I(-1) = \pi \arcsin(-1) = -\frac{\pi^2}{2}$ a $I(1) = \pi\arcsin(1) = \frac{\pi^2}{2}$ a bude platit, že $I(a) = \pi\arcsin(a)$ $\forall a \in \langle -1,1\rangle$. Platí předpoklady věty 13.30 o spojitosti z Kopáčka III:

1) $F(a,x) = \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}$ je měřitelná na $(0,\pi)$ $\forall a \in \langle -1,1\rangle$, neboť je tam spojitá

2) pro $\forall x \in (0,\pi) / \{\frac{\pi}{2}\}$ je $F(a,x)$ spojitá (tedy pro s.v. $x \in (0,\pi)$)

3)
$$|F(a,x)| = \left|\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\right| \leq g(x) = \begin{cases} x \in (0,\frac{\pi}{2}): & \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x} \\ x \in (\frac{\pi}{2}, \pi): & \frac{\ln(1-\cos x)}{\cos x} \end{cases}$$

což jsou obě lebesgueovsky integrovatelné funkce (jsou spojité a omezené na uzavřeném intervalu)

máme tedy majorantu pro s.v. $x \in (0,\pi)$

Věta o spojitosti integrálu s parametrem platí a máme tedy:

$$\boxed{I(a) = \pi \arcsin a \quad \forall a \in \langle -1, 1\rangle.}$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx =: I(a,b)$

Označme $f(x,y) = \dfrac{x^y}{\ln x} = \dfrac{e^{y\ln x}}{\ln x}$ a přepíšeme pomocí Newtonova vzorce

$$f(x,b) - f(x,a) = \frac{x^b}{\ln x} - \frac{x^a}{\ln x} = \int_b^a \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy =$$

$$= \int_a^b \frac{e^{y\ln x}\cdot \ln x}{\ln x}\,dy = \int_a^b e^{y\ln x}\,dy$$

$I(a,b) = \displaystyle\int_0^1\int_a^b e^{y\ln x}\,dy\,dx$ ... máme původní integrál napsaný jako 2 jednorozměrné $\int$
$\Rightarrow$ použijeme <u>Fubiniho větu</u> a <u>prohodíme integrály</u>

$$I(a,b) = \int_0^1\int_a^b \underbrace{e^{y\ln x}}\,dy\,dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_a^b\int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_a^b \left[\underbrace{\frac{x^{y+1}}{y+1}}_{y \neq -1}\right]_{0=x}^{1=x} dy$$

$\boxed{\text{nezáporná spojitá funkce na } (0,1)\times(a,b) =: \Omega \;\Rightarrow\; f \in L^*(\Omega)}$

$$= \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \boxed{\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right) = I(a,b) \quad \text{pro } \forall a,b > -1 \text{ nebo } \forall a,b\in\mathbb{R}\ a=b}$$

<u>Závěr:</u> Integrály konvergují $\forall a,b > -1$ nebo pokud $a=b$ a jsou rovny $\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$.