Termín pro odevzdání: čtvrtek 13. května 2021

Postupem analogickým tomu ze cvičení nalezněte tzv. fundamentální řešení pro operátor $\Delta^2 + k^4$, tedy řešení rovnice

$$\Delta^2 u + k^4 u = \delta \,, \qquad \text{v } \mathbb{R}^3 \,.$$

Tzv. biharmonický operátor je definován následovně $\Delta^2 u = \Delta\Delta u$, dále $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ a δ značí Diracovu distribuci.

Postup:

1. Na rovnici formálně aplikujte Fourierovu transformaci $\mathcal{F}$ a využijte zatím "z nebe" spadlou identitu $\mathcal{F}(\delta) = 1$ a vyjádřete $\mathcal{F}(u)$. Tyto úpravy chápejme zatím jako zcela formální s tím, že dobrý smysl jim dáme v blížící se kapitole o distribucích.

2. Proveďte inverzi $\mathcal{F}(u)$ v klasickém smyslu (diskutujte, v jakém z prostorů, pro které máme Fourierovu transformaci definovanou, pracujete). Na výpočet se Vám může hodit vzoreček pro Fourierovu transformaci radiálních funkcí v $\mathbb{R}^3$, který jsme si uvedli na cvičení, a který si pro jistotu připomeňme (označme $\rho = |\xi|$, $r = |x|$):

$$\mathcal{F}(g(r))(\rho) = \frac{2}{\rho} \lim_{R\to\infty} \int_0^R g(r) r \sin(2\pi r \rho) dr \,.$$

3. Při výpočtu integrálu použijte reziduovou větu a všechny kroky (alespoň stručně) zdůvodněte.