Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	8	10	8	10	36
Získáno					

[8] 1. Nalezněte všechny singularity funkce f definované vztahem

$$f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{z(1+\mathrm{e}^{az})},$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$ je dané kladné reálné číslo. Pro každou singularitu určete její typ a spočtěte reziduum.

[10] 2. Pomocí integrace vhodné komplexní funkce spočtěte integrál

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$$

[8] 3. Zkoumejte posloupnost $\{f_{\alpha,n}\}_{n=1}^{+\infty}$ jejíž jednotlivé členy jsou definovány jako

$$f_{\alpha,n}(x) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{\pi} \frac{(\sin nx)^2}{n\,|x|^\alpha},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. (Parametr α je stejný pro všechny členy posloupnosti. Čtěte pozorně, ve jmenovateli je výraz $n\,|x|^\alpha$ nikoliv $|nx|^\alpha$. Dále připomínáme, že platí $\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.)

a) Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ ve smyslu konvergence distribucí platí

$$T_{f_{\alpha,n}} \to \delta,$$

kde δ je Diracova distribuce v nule a $T_{f_{\alpha,n}}$ jsou regulární distribuce přiřazené lokálně integrovatelným funkcím $f_{\alpha,n}$.

b) Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ ve smyslu konvergence distribucí platí

$$T_{f_{\alpha,n}} \to 0.$$

Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována.

Pozor! Ve zkouškové písemné práci byl příklad zadán takto

$$f_{\alpha,n}(x) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{\pi} \frac{(\sin nx)^2}{nx^\alpha},$$

což ovšem znamená, že pracujeme s funkcí x^α, která není pro $x \in \mathbb{R}^-$ a některé exponenty α dobře definovaná. Řešením zkouškové písemné práce tak mohlo být prosté konstatování “chcete po nás nesmysly”, za což byste získali plný počet bodů.

[10] 4. Najděte Fourierovu transformaci distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ zadané vztahem

$$T =_{\mathrm{def}} (\cos 2x)\,(\delta'' + 2\delta' + \delta)\,,$$

kde δ značí standardní Diracovu distribuci v nule, a δ' a δ'' značí první a druhou (distributivní) derivaci Diracovy distribuce. Vzorec pro Fourierovu transformaci Diracovy funkce a pravidla pro počítání s Fourierovou transformací považujte za známá, nemusíte je odvozovat.