Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	5	7	6	5	5	7	35
Získáno							

[5] 1. a) Určete $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, aby limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x \sin x - \sinh x \cos x}{x^n}$$

existovala a byla konečná. (To jest aby bylo $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, kde $L \in \mathbb{R}$. Upozorňujeme, že i nula je reálné číslo!) Určete hodnotu limity pokud jsou splněny vámi určená omezení na konstantu n.

b) Určete $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, aby limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x \sin x}{x^n}$$

existovala a byla konečná. (To jest aby bylo $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, kde $L \in \mathbb{R}$. Upozorňujeme, že i nula je reálné číslo!) Určete hodnotu limity pokud jsou splněny vámi určená omezení na konstantu n.

Řešení:

Taylorovy rozvoje v bodě $x_0 = 0$ základních funkcí vystupujících ve zkoumaném výrazu jsou

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right), \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right), \\
\sinh x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right), \\
\cosh x &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Po rozepsání čitatele pomocí Taylorových rozvojů dostaneme

$$\cosh x \sin x - \sinh x \cos x = \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right),$$

odkud plyne podmínka $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ a odpovídající hodnoty limity jsou

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} 0 & n \in \{0,1,2\}, \\ \frac{2}{3} & n = 3. \end{cases}$$

Obdobně postupujeme i pro druhou limitu

$$\cosh x \sin x = x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

odkud plyne podmínka $n \in \{0, 1\}$ a odpovídající hodnoty limity jsou

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ 1 & n = 1. \end{cases}$$

[7] 2. Budíž dána funkce $f : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\sin x \,(\sin y)^3}{x^2 + y^2}.$$

a) Dodefinujte funkci f v bodě $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ vhodným způsobem tak, aby nově definovaná funkce byla spojitá v bodě $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. Spojitost vámi definované funkce jasně odůvodněte.

b) Pro vámi dodefinovanou funkci spočtěte *dle definice* parciální derivace podle x a y v bodě $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

c) Zjistěte, zda pro vámi dodefinovanou funkci existuje totální diferenciál $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. Pokud ano, spočtěte ho.

Řešení:

Aby byla nově definovaná funkce, označme si ji kupříkladu f_{ext}, spojitá, musí platit

$$f_{\mathrm{ext}} = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \\ L, & \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

kde

$$L = \lim_{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}} \frac{\sin x \,(\sin y)^3}{x^2 + y^2}.$$

(Funkce je v daném bodě spojitá právě když je funkční hodnota v daném rovná limitě.) Spočteme tedy limitu. Nejdříve prozkoumáme limitu “po přímkách”. Volíme tedy $x = s$ a $y = ks$, kde $k \in \mathbb{R}$, a zkoumáme limitu $s \to 0+$,

$$\lim_{s \to 0+} \frac{\sin s \,(\sin (ks))^3}{s^2 + (ks)^2} = \lim_{s \to 0+} \frac{\sin s}{s} \left(\frac{\sin (ks)}{ks} \right)^3 \frac{k^3 s^4}{s^2 (1 + k^2)} = 0,$$

přičemž limita je nezávislá na k. Jediná možnost ohledně volby L je tedy nula. Musíme ovšem ukázat, že nula je limita ve smyslu funkcí více proměnných, limita po přímkách nám ke spojitosti nestačí. Jest ovšem

$$0 \leq \left| \frac{\sin x \,(\sin y)^3}{x^2 + y^2} - L \right| = \frac{|\sin x| \,|\sin y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x| \,|y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2}^3}{x^2 + y^2} = \|\boldsymbol{x}\|^2_{2,\mathbb{R}^2} ,$$

kde jsme využili známé nerovnosti $|\sin x| \leq |x|$ a kde $\|\boldsymbol{x}\|_{2,\mathbb{R}^2}$ značí standardní Eukleidovskou normu v $\mathbb{R}^2$, tedy $\|\boldsymbol{x}\|_{2,\mathbb{R}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Z výše uvedené nerovnosti a z věty o limitě sevřené funkce pak plyne

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}} \frac{\sin x \,(\sin y)^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Spočteme parciální derivace. (Opusťme nyní značení f_{ext} pro rozšířenou funkci, a značme-ji prostě f.) Definice parciální derivace vůči proměnné x v bodě $\boldsymbol{x}_0$ je

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{e}_{\hat{x}}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h},$$

kde $\boldsymbol{e}_{\hat{x}}$ je vektor ve směru osy x, $\boldsymbol{e}_{\hat{x}} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. V námi zkoumaném případě je $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ a dostaneme tedy

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin h (\sin 0)^3}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0.$$

Obdobně postupujeme v případě parciální derivace $\left. \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0}$. Jest

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin 0 (\sin h)^3}{0 + h^2} - 0}{h} = 0.$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0} = 0,$$

z čehož plyne, že kandidátem na totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ je nulové lineární zobrazení,

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = 0,$$

kde $\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_1 \\ \mathrm{h}_2 \end{bmatrix}$ je libovolný vektor z $\mathbb{R}^2$. Ověříme, že toto zobrazení vyhovuje požadavkům na totální diferenciál, musíme tedy ověřit, že

$$|f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}| = o\left(\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}\right).$$

Definici lze ekvivalentním způsobem přepsat jako

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}|}{\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}} = 0.$$

Dosazením do definice funkce f a s použitím předpokládaného vztahu pro totální diferenciál $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = 0$ dostaneme

$$0 \leq \frac{|f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}|}{\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}} = \frac{\left|\frac{\sin h_1 (\sin h_2)^3}{h_1^2+h_2^2}\right|}{\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}} \leq \frac{\frac{|h_1||h_2|^3}{h_1^2+h_2^2}}{\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}} \leq \frac{\frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}^3}{h_1^2+h_2^2}}{\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}} = \|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2},$$

což dle věty o limitě sevřené funkce ukazuje, že pro volbu $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = 0$ skutečně dostaneme

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}|}{\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}} = 0.$$

Nulové lineární zobrazení je tedy skutečně totální diferenciál příslušné funkce v bodě $\boldsymbol{x}_0$.

[6] 3. Zjistěte, zda konverguje řada
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n+1}.$$
(Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci.)

Řešení:

Členy řady se v absolutní hodnotě pro $n \to +\infty$ chovají jako $\frac{1}{n}$, řada tedy bude přinejlepším pouze neabsolutně konvergentní. K původní řadě přičteme a odečteme řadu
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n},$$
o které víme, že je neabsolutně konvergentní. Výsledkem je
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n+1} &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \left(\frac{n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n+1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \frac{n^2+n+1}{n\left(n^3+2n^2+2n+1\right)} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}.\end{aligned}$$
Řada
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \frac{n^2+n+1}{n\left(n^3+2n^2+2n+1\right)}$$
je ovšem absolutně konvegentní, což je důsledkem limitního srovnávacího kritéria s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Původní řada je tedy součtem konvergetní řady a neabsolutně konvergentní řady a je tedy *neabsolutně konvergentní*.

[5] 4. Najděte fundamentální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^5 y}{\mathrm{d}x^5} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0.$$

(Fundamentální řešení zapište tak, aby obsahovalo pouze reálné funkce.)

Řešení:

Charakteristický polynom dané rovnice je

$$\lambda^5 + \lambda^2 = 0,$$

kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2\left(\lambda^3+1\right)$ jsou

$$\lambda_{1,2} = 0,$$
$$\lambda_{3,4,5} = (-1)^{\frac{1}{3}},$$

spočteme odmocninu,

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2}{3}\pi\right)},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$, odkud plyne, že

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

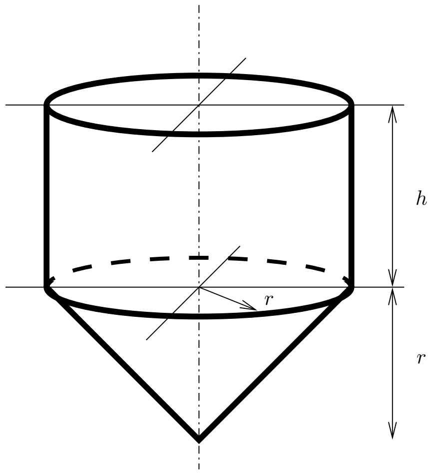
což znamená, že kořeny charakteristického polynomu jsou

$$\lambda_{1,2} = 0,$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\lambda_4 = -1,$$
$$\lambda_5 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

a fundamentální řešení je tudíž lineární kombinací funkcí

$$1, x, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

[5] 5. Nádoba je tvořená válcem o poloměru podstavy r a výšce h a kuželem o poloměru podstavy r a výšce r, viz Obrázek 1. Najděte hodnoty parametrů h a r, které pro zadaný objem V_a minimalizují plošný obsah pláště nádoby S. (Plášť nádoby je tvořen pláštěm válce, horní podstavou válce a pláštěm kužele.) *Ukažte, že vámi nalezená hodnota je skutečně minimální!* Připomínáme, že objem kužele o poloměru podstavy R a výšce H je dán vzorcem $\frac{1}{3}\pi R^2 H$ a povrch pláště kužele o poloměru podstavy R a výšce H je dán vzorcem $\pi R\sqrt{H^2+R^2}$.



Obrázek 1: Nádoba.

Řešení:

Objem nádoby je součtem objemů válce a kužele, jest tedy

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^3 = \pi r^2 \left(h + \frac{1}{3} r\right).$$

Plošný obsah pláště nádoby je součtem plošných obsahů pláště válce, horní podstavy válce a pláště kuželu, jest tedy

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h + \pi r s,$$

kde s je délka stěny kužele. V našem případě je z obrázku zřejmé, že

$$s = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2},$$

celkem proto

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h + \pi r^2\sqrt{2} = \pi r \left(r(1+\sqrt{2}) + 2h\right).$$

(Není nutné přít se o to, zda je plošný obsah pláště nádoby S—tak by uvažoval matematik—nebo $2S$—tak by uvažoval inženýr, který by měl vypočíst množství barvy potřebné k natření nádoby. Hodnoty r a h, pro které S či $2S$ nabývá minima jsou stejné.) Na položenou otázku tedy získáme odpověď tak, že budeme hledat extrém funkce $S(r,h)$ vůči vazbě $V(r,h) = V_a$. Není však nutné použít Lagrangeovy multiplikátory, neboť vazba

$$\pi r^2 \left(h + \frac{1}{3} r\right) = V_a$$

nám umožní snadno vyjádřit výšku válce h jakožto funkci r. Je-li zadán požadovaný objem V_a, pak ze vzorce pro objem plyne, že

$$h = \frac{V_a}{\pi r^2} - \frac{1}{3} r.$$

Tento vztah dosadíme do vzorce pro povrch nádoby a dostaneme předpis pro velikost povrchu jako funkci proměnné r

$$S(r) = \pi r \left(r(1+\sqrt{2}) + \frac{2V_a}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r\right) = \pi r^2 \left(\frac{1}{3} + \sqrt{2}\right) + \frac{2V_a}{r}.$$

čímž jsme úlohu o vázaném extrému efektivně převedli na úlohu o hledání extrému reálné funkce jedné reálné proměnné. Potřebujeme nalézt minimum této funkce, spočteme první derivaci

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r \left(\frac{1}{3} + \sqrt{2}\right) - \frac{2V_a}{r^2}.$$

V bodě minima musí být derivace nulová, což dává podmínku

$$2\pi r_{\min}\left(\frac{1}{3}+\sqrt{2}\right)-\frac{2V_a}{r_{\min}^2}=0,$$

odkud plyne

$$r_{\min}=\left(\frac{V_a}{\pi\left(\frac{1}{3}+\sqrt{2}\right)}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Nalezený bod je skutečně minimem, což plyne z průběhu první derivace, případně z testu pomocí druhé derivace, je totiž

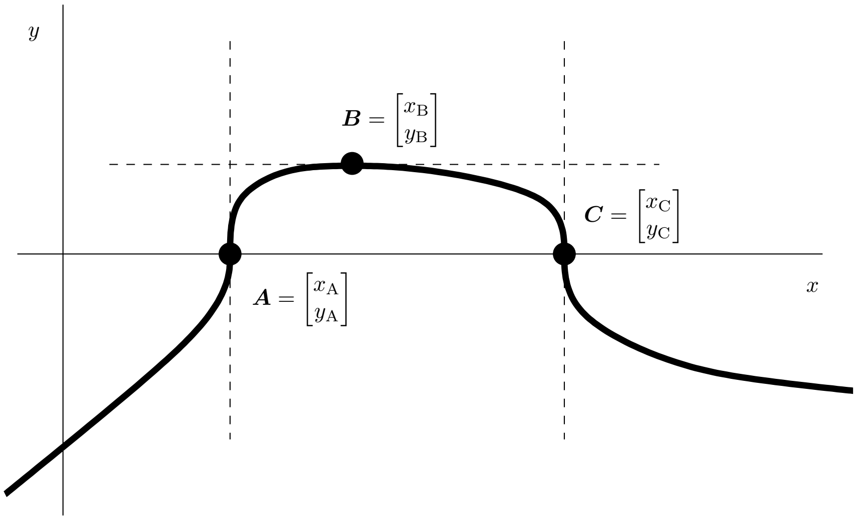
$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}r^2}=2\pi\left(\frac{1}{3}+\sqrt{2}\right)+\frac{4V_a}{r^3}>0,$$

pro libovolné (kladné) r. Nalezené minimum je globálním minimem. (Globálním minimem na množině přípustných poloměrů, tedy pro $r>0$.) Fakt, že se jedná o globální minimum je zřejmý ze znaménka první derivace.

[7] 6. Uvažujte funkci $y(x)$ zadanou implicitně předpisem

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(y+1\right)^{2}-\mathrm{e}^{x+y}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)x=0.$$

Z jakéhosi nástroje pro kreslení grafů implicitně zadaných funkcí jste získali Obrázek 2. (Osy x a y jsou v obrázku umístěny jen pro orientaci, průsečík "os" na obrázku neodpovídá bodu $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^{\top}$.) Podle obrázku se zdá, že by na grafu funkce mohly existovat body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{C}$, ve kterých je tečna ke grafu funkce svislá přímka. Dále se zdá, že tečna ke grafu funkce v bodě $\boldsymbol{B}$ je přímka rovnoběžná s osou x. (Zdá se, že funkce $y(x)$ nabývá v bodě x_{B} lokálního maxima.) Tyto doměnky potvrďte/vyvraťte, a pokud tvrdíte, že domněky platí, najděte explicitně souřadnice x_{A}, x_{B}, x_{C} a y_{A}, y_{C}. Nesnažte se explicitně spočíst y_{B}, v tomto případě jen napište rovnici, jejímž řešením je y_{B}.



Obrázek 2: Graf funkce $y(x)$.

Řešení:

K řešení použijeme větu o implicitních funkcích. Označme si

$$F(x,y)=_{\mathrm{def}}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(y+1\right)^{2}-\mathrm{e}^{x+y}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)x,$$

a představme si, že $y=y(x)$. Pak derivováním vztahu $F(x,y(x))=0$ podle řetízkového pravidla získáme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

což v našem případě znamená

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(y+1\right)^{2}-\mathrm{e}^{x+y}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{e}}{2}\right),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\mathrm{e}^{x}\left(y+1\right)-\mathrm{e}^{x+y}.$$

Derivace $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ je tedy fomálně dána vztahem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(y+1\right)^{2}-\mathrm{e}^{x+y}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)}{\mathrm{e}^{x}\left(y+1-\mathrm{e}^{y}\right)}.$$

Problémovým se jeví bod, ve kterém platí

$$\mathrm{e}^{x}\left(y+1-\mathrm{e}^{y}\right)=0,$$

v tomto bodě tedy bude výraz v jmenovateli nulový. Řešením výše uvedené rovnice je $y_0=0$ a je to řešení jediné, jak lze snadno nahlédnout z průběhu funkce $z+1-\mathrm{e}^{z}$. Podíváme se nyní, zda k tomuto y existuje x_0, tak že

$$F(x_0,y_0)=0.$$

Dosadíme do předpisu pro funkci F, a zjistíme, že rovnice pro hledané x_0 je

$$-\frac{\mathrm{e}^{x_0}}{2}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)x_0=0.$$

Tato rovnice má dvě řešení. (Z obrázku plyne, že je žádoucí, aby funkce měla dvě řešení, tak se je snažíme najít.) Řešeními jsou

$$x_{0,1} = 0,$$
$$x_{0,2} = 1.$$

(Zdá se, že člověk, který příklad zadával, nebyl bezcitný sadista.) Z pohledu existence konečné derivace $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jsou tedy problematické body

$$\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} x_{0,2} \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jest

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^x (y+1)^2 - \mathrm{e}^{x+y} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2}\right)}{\mathrm{e}^x (y+1-\mathrm{e}^y)} \xrightarrow{x\to 0, y\to 0} \frac{-1 + \frac{\mathrm{e}}{2}}{(y+1-\mathrm{e}^y)} \xrightarrow{x\to 0, y\to 0} +\infty$$

a dále

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^x (y+1)^2 - \mathrm{e}^{x+y} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2}\right)}{\mathrm{e}^x (y+1-\mathrm{e}^y)} \xrightarrow{x\to 1, y\to 0} \frac{-\frac{1}{2}}{(y+1-\mathrm{e}^y)} \xrightarrow{x\to 1, y\to 0} -\infty.$$

Z uvedeného plyne, že můžeme směle prohlásit, že

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pojďmě se nyní podívat na bod $\boldsymbol{B}$. Domníváme se, že tečna je v tomto bodě nulová, proto musíme prozkoumat čitatel výrazu pro derivaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^x (y+1)^2 - \mathrm{e}^{x+y} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2}\right)}{\mathrm{e}^x (y+1-\mathrm{e}^y)}$$

a zjistit, zda může být nulový. Chceme tedy, aby platilo

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x_B} (y_B+1)^2 - \mathrm{e}^{x_B+y_B} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2}\right) = 0.$$

Kromě toho také hledaná bod musí ležet na grafu funkce $F(x, y) = 0$, musí tedy platit

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x_B} (y_B+1)^2 - \mathrm{e}^{x_B+y_B} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2}\right) x_B = 0.$$

Z první rovnice lze dosadit do druhé a dostaneme

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2}\right) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2}\right) x_B = 0,$$

odkud plyne, že

$$x_B = 1 + \frac{1}{1-\mathrm{e}}.$$

Odpovídající bod y_B bychom našli dosazením za x_B do jedné ze dvou předešlých rovnic. Rovnice, která takto vznikne ovšem není přímočaře explicitně řešitelná. (My však víme, že bude mít řešení, a sice právě jedno řešení. Implicitně zadaná funkce $y(x)$ prochází body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, a musí tedy, pokud je spojitá na intervalu $[0, 1]$ nabývat maxima. Pokud uvěříme na spojitost a diferencovatelnost $y(x)$ na tomto intervalu, což není těžké, máme tedy i tvrzení o existenci řešení příslušné rovnice pro y_B.)

Obdobně lze postupovat dále, můžeme kupříkladu zkoumat asymptoty a podobně, ale na to se nás nikdo neptal.

Příklad můžeme vyřešit i bez přímého odkazu na větu o implicitních funkcích. Víme, že *normálový* vektor $\boldsymbol{n}$ v bodě $\boldsymbol{x}_0$ k implicitně zadané křivce $F(x, y) = 0$ v $\mathbb{R}^2$ je dán vztahem

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_0) = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}.$$

Body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{C}$ jsou body, ve kterých je *normálový* vektor rovnoběžný s osou x, aneb

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{n}(\boldsymbol{C}) = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix},$$

kde $a, c \in \mathbb{R}$ jsou nějaká reálná čísla. Z vyjádření pro normálový vektor tedy dostaneme podmínku $\frac{\partial F}{\partial y}(x_A, y_A) = 0$ respektive $\frac{\partial F}{\partial y}(x_C, y_C) = 0$, což znamená, že musíme najít řešení rovnice $\mathrm{e}^x \left(y + 1 - \mathrm{e}^y\right) = 0$, což je ovšem stejná podmínka, kterou jsme obdrželi postupem založeným na větě o implicitních funkcích. Obdobně postupujeme v případě bodu $\boldsymbol{B}$, v tomto případě musí být normálový vektor rovnoběžný s osou y, aneb

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}) = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},$$

kde $b \in \mathbb{R}$ je nějaké reálné číslo. Z vyjádření pro normálový vektor tedy dostaneme podmínku $\frac{\partial F}{\partial x}(x_B, y_B) = 0$, což znamená, že musíme najít řešení rovnice $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x \left(y+1\right)^2 - \mathrm{e}^{x+y} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2}\right) = 0$, což je ovšem stejná podmínka, kterou jsme obdrželi postupem založeným na větě o implicitních funkcích.