3 LIMITY PODRUHÉ (nikoliv však naposled)

3.1 Limity nevlastní, limity v nevlastních bodech, limity posloupností

Definice Posloupnost (číselná) je jakékoliv zobrazení $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$. Diskrétní hodnoty $\varphi(n)$ nazýváme n-tý člen posloupnosti. Často zobrazení φ zapisujeme ve tvaru $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ či ještě častěji $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

U posloupností nás bude zajímat chování φ_n pro rostoucí n; ptáme se, zda existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n)$ a čemu se rovná.

Také se v této kapitole zaměříme na limity fcí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{C}^*$ nebo $A \in \mathbb{R}^*$, v situacích, kterým jsme se doposud vyhýbali. Jedná se o tyto případy:

- $\boxed{x_0 = +\infty}$ nebo $\boxed{x_0 = -\infty}$ (tj. LIMITY V NEVLASTNÍCH BODECH)
- $\boxed{A = \infty}$ je-li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nebo $\boxed{A = +\infty} \vee \boxed{A = -\infty}$ je-li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tj. NEVLASTNÍ LIMITY)

Popis všech výše uvedených limit lze získat z obecné definice limity zavedené v kapitole 1. Připomeňme si ji.

Def. Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$), $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$). Říkáme, že

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{\text{df.}}{\equiv} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta(x_0) \cap D_f)(f(x) \in U_\varepsilon(A))$$

Připomeňme si také okolí $\pm\infty$ resp. ∞:

$$P_\delta(+\infty) = \left(\tfrac{1}{\delta}, +\infty\right), \quad P_\delta(-\infty) = \left(-\infty, -\tfrac{1}{\delta}\right)$$
$$U_\delta(\pm\infty) = P_\delta(\pm\infty), \quad P_\delta(\infty) = \left\{z \in \mathbb{C};\ |z| > \tfrac{1}{\delta}\right\}.$$

Teď již není těžké si zapsat v různých konkrétních případech několik ekvivalentních formulací. Zde jsou tři případy:

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in \left(-\infty, -\tfrac{1}{\delta}\right)\right) |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$

$$\underset{M := \delta^{-1}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)\left(x < -M \Rightarrow |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon\right)$$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in(\frac{1}{\delta},+\infty))(f(x)\in(\frac{1}{\varepsilon},+\infty))$

$$\underset{\substack{L:=\varepsilon^{-1}\\ M:=\delta^{-1}}}{\iff} (\forall L>0)(\exists M>0)(x>M \Rightarrow f(x)>L)$$

(iii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(n>\frac{1}{\delta} \Rightarrow a_n\in(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon}))$

$$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(n\geq n_0 \Rightarrow a_n\in(-\infty,-1/\varepsilon))$$

$$\underset{L:=\varepsilon^{-1}}{\iff} (\forall L>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(n\geq n_0 \Rightarrow a_n<-L)$$

$\boxed{\text{Věta 3.1}}$ (Jak limity v nevlastních bodech a nevlastní limity počítat?)

- Pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(x_0\in\mathbb{R}^*)$ platí:

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0+$

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0+$

- Pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ platí

(3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$

- Pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ platí:

(4) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ pokud $\lim_{y\to0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ existuje

(5) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to0-} f\left(\frac{1}{y}\right)$ -//- $\lim_{y\to0-} f\left(\frac{1}{y}\right)$ existuje.

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ z definice

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff (\forall L>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))(f(x)>L)$$

$$\iff (\forall L>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{L}\right)$$

$$\underset{\varepsilon=L^{-1}}{\iff} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\frac{1}{f(x)}<\varepsilon\right)$$

$$\underset{\text{definice}}{\iff} \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0+.$$

$\boxed{\text{Podobně se dokáže (2).}}$

$\boxed{\text{Ad (3)}}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff (\forall L>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ |f(x)|_{\mathbb{C}}>L$$

$$\underset{\varepsilon=\frac{1}{L}}{\iff} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\frac{1}{|f(x)|_{\mathbb{C}}}<\varepsilon\right)$$

$$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\left|\frac{1}{f(x)}-0\right|_{\mathbb{C}}<\varepsilon\right)$$

$\boxed{\text{Ad (4)}}$ Předpokládáme, že existuje $\lim\limits_{y\to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right) = A \in \mathbb{C}^*$. To znamená:

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(0<y<\delta \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)\in U_\varepsilon(A)\right)$, což je ekvivalentní s

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(\frac{1}{y}>\frac{1}{\delta} \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)\in U_\varepsilon(A)\right)$ $\quad\overset{}{\Longleftrightarrow}\quad x=\frac{1}{y}$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(x>\frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A)\right)$ $\quad\Longleftrightarrow\quad M=\delta^{-1}$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists M>0)\left(x>M \Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A)\right)$ $\quad\Longleftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A.$

Důkaz (5) si proveďte podobně sami. ☐

V dalším budeme zkoumat, které věty platné pro vlastní limity ve vlastních bodech zůstávají v platnosti i pro nevlastní limity v nevlastních bodech a posloupnosti. Přímočará zobecnění jsou ponechána posluchačům, aby si je dokázal.

$\boxed{\text{Věta 3.2}}$ Pokud $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje $(x_0\in\mathbb{R}^*)$, pak je jediná.

Dk: Sporem. Předpokládáme, že existují alespoň dvě limity $A_1, A_2\in\mathbb{R}^*$ resp. $\mathbb{C}^*$ a jsou různé.

- Kdyby existovaly dvě různé vlastní limity, pak dostáváme spor s Větou 1 (respektive jejím bezprostředním zobecněním zahrnujícím případy $x_0=+\infty$ nebo $x_0=-\infty$.)
- Když $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, pak zbývá vyloučit situaci, kdy $A_1\in\mathbb{C}$ a $A_2=\infty$.

  Protože $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_2 = \infty$, tak

  k $L := 2|A_1|+1$ $(\exists \delta_2>0)(\forall x\in P_{\delta_2}(x_0))$ $\boxed{|f(x)|_{\mathbb{C}} > 2|A_1|_{\mathbb{C}}+1}$.

  Protože $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_1\in\mathbb{C}$, tak

  k $\varepsilon := |A_1|+1$ $(\exists \delta_1>0)(\forall x\in P_{\delta_1}(x_0))$ $|f(x)-A_1|_{\mathbb{C}} < |A_1|+1$

  Protože $|f(x)|_{\mathbb{C}} - |A_1|_{\mathbb{C}} < |f(x)-A_1|_{\mathbb{C}}$, tak pro $x\in P_{\delta_1}(x_0)\cap P_{\delta_2}(x_0)$

  platí $|f(x)| < 2|A_1|+1$, což je protiklad s nerovností výše; ↯.
- Když $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tak si sami podobně zdůvodněte, že nemohou nastat situace:
  - $A_1\in\mathbb{R}$, $A_2=+\infty$,
  - $A_1\in\mathbb{R}$, $A_2=-\infty$,
  - $A_1=-\infty$, $A_2=+\infty$. ☐

$\boxed{\text{Věta 3.3}}$ Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$), pak $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$.
($x_0 \in \mathbb{R}^*$)

Dk přenechám laskavému čtenáři. ☒

Příklad (který ukazuje, že opačná implikace neplatí)

Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} := \{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n| = +\infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ neexistuje.

$\boxed{\text{Věta 3.4}}$ Věta ~~?~~ o limitě $\pm, \cdot, \div$ platí i v nevlastních bodech (HODNOTY JSOU VŠAK VLASTNÍ!).
Věta 9 a Věta 10 naopak platí nejen v nevlastních bodech, ale i pro nevlastní limity. ☒

Dk pouhým rozšířením. přímočarým

Příklad (který ukazuje, že Věta 3.4 o $\pm, \cdot, \div$ obecně neplatí, jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$)

Buď $f(x) = x^n$ a $g(x) = -x^m$ a $h(x) = x^m$, $x_0 = +\infty$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Pozorujeme: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ a

dále:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \boxed{n>m} \quad \text{neboť } x^n + (-x^m) = \underbrace{x^n}_{\to +\infty}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^{n-m}}\right)}_{\to 1} \\ 0 & \text{pro } \boxed{n=m} \\ -\infty & \text{pro } \boxed{n<m} \quad \text{neboť} \end{cases}$$

$$x^n + (-x^m) = \underbrace{-x^m}_{\to -\infty}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^{m-n}}\right)}_{\to 1}$$

a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m} = +\infty & \text{pro } \boxed{n>m} \\ = 1 & \text{pro } \boxed{n=m} \\ \lim \dfrac{1}{x^{m-n}} = 0+ & \text{pro } \boxed{n<m} \end{cases}$$

Tyto příklady dokládají, že obecně nelze dát smysl výrazům typu $+\infty + (-\infty)$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $0 \cdot (-\infty)$, $\frac{0}{0}$, atd.

Následující věty tak obsahují podmínky, které zaručují, aby věty o limitě součtu, součinu a podílu platily i pro práci s nekonečnem.

Věta 3.5 Pro $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ platí:

(+) Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{respektive } -\infty) \\ g \text{ je omezená zdola (respektive shora) na } P_\Delta(x_0) \end{array} \right\}$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$ (resp. $-\infty$)

(*) Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty) \\ g \text{ je omezená zdola (resp. shora) číslem } \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \text{resp. } -\beta \\ (\beta > 0) \end{array} \right\} \text{ na } P_\Delta(x_0), \end{array} \right.$

pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

($\div$) • Pokud $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a $\left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{array} \right\}$ na $P_\Delta(x_0)$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array} \right.$.

• Pokud $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = 0$.

Dk $\boxed{\text{Ad } (+)}$ Víme: $(\forall \tilde{L} > 0)(\exists P_\delta(x_0))\big(x \in P_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > \tilde{L}\big)$ (1)

$(\exists M > 0)(\exists P_\Delta(x_0))\ x \in P_\Delta(x_0) \Rightarrow g(x) > -M$ (2)

Pro $L > 0$ libovolné pevné, definuj $\tilde{L} := L + M$ a pro toto $\tilde{L}$ najdi $\delta > 0$ tak, že platí (1). Pak pro $x \in P_\delta(x_0) \cap P_\Delta(x)$ je $f(x) + g(x) > \tilde{L} - M = L + M - M = L$. Tedy dle definice $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$.

$\boxed{\text{Ad } (*)}$ Předpokládáme, že platí (1) a navíc

$(\exists \alpha > 0)(\exists \tilde{\delta} > 0)(\forall x \in P_{\tilde{\delta}}(x_0))\ g(x) > \alpha > 0$. (3).

Pro $L > 0$ libovolné, polož $\tilde{L} := \frac{L}{\alpha}$ a k němu najdeme δ tak, že (1) platí. Pak pro $x \in P_\delta(x_0) \cap P_{\tilde{\delta}}(x_0)$: $f(x) g(x) \geq \frac{L}{\alpha} \alpha = L > 0$.

$\boxed{\text{Ad } (\div)}$ Pokud $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0+$. Dle Věty 3.1, část (1): $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Zbylá tvrzení si ověřte sami. ∎

<u>Cvičení</u> Ukažte, že platí: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ omezená zdola na $P_\delta(x_0)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow$ — " — shora na $P_\delta(x_0)$.

Věta 3.6 (sendvičová) (i) Věta 8 platí i pro $x_0=+\infty$ nebo $x_0=-\infty$.

(ii) Nechť $x_0\in\mathbb{R}^*$, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Pokud $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ a $f(x)\le g(x)$ na $P_\Delta(x_0)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

Dk Sami.

Věta 3.7 (l'Hospitalova) (případy $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{A}{\infty}$). Buď $x_0\in\mathbb{R}^*$.

Jestliže

(1) Existuje $P_\delta(x_0)$ tak, že $\forall x\in P_\delta(x_0)$ existují $f'(x)$ a $g'(x)$,

(2) Existuje $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A\in\mathbb{R}^*$

(3) Buď $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$,

Potom $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A}$. Totéž platí pro jednostranné limity. ∎

Dk později v sekci 4.

Příklady (1) Přímo z definice: $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} x=\pm\infty}$

(2) z definice resp. věty o exponenciále plyne $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty}$ a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0+}$. Odsud $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty}$ a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $(n\in\mathbb{N})$ neboť $x<x^n$ pro $x\ge 1$ a dle sendvičové věty dostáváme tvrzení (též z (1))

(4) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}+\infty & n \text{ sudé}\\ -\infty & n \text{ liché}\end{cases}}$ neboť $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\lim\limits_{-x\to+\infty}(-x)^n=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^n x^n=\begin{cases}+\infty\\ -\infty\end{cases}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(\alpha\ln x)=\begin{cases}+\infty & \text{je-li } \alpha>0\\ 1 & \text{je-li } \alpha=0\\ 0 & \text{je-li } \alpha<0\end{cases}$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\dots+\frac{a_0}{x^n}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} x^n \lim\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\dots+\frac{a_0}{x^{n-1}}\right)=\begin{cases}+\infty & \text{je-li } a_n>0.\\ -\infty & \text{je-li } a_n<0.\end{cases}$

∎

POROVNÁNÍ RYCHLOSTI KONVERGENCE

Víme: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ (je-li $\alpha>0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Zajímá nás otázka, která z těchto funkcí jde k $+\infty$ nejrychleji, která nejpomaleji. Protože $e^x\cdot e^{-x} = 1$ implikuje $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, lze se ptát, které z funkcí e^{-x}, $\frac{1}{x^\alpha}$, $\frac{1}{x^\beta}$ $(\beta>\alpha>0)$, $\frac{1}{\ln x}$ konvergují k 0 pro $x\to+\infty$ nejrychleji a nejpomaleji.

Platí:

(i) Buď $\alpha>0$ libovolné. Pak existuje $k\in\mathbb{N}$ takové, že $k-1\le\alpha\le k$. Tedy

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} \underset{k\text{-krát}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}_{>0}\,x^{\alpha-k}} = \lim_{x\to+\infty} x^{k-\alpha}e^x = +\infty}$$

(ii) Buď $\alpha>0$ libovolné.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = \alpha\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$$

(iii) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} \overset{\text{dle (i)}}{=} 0.$$

Tedy: libovolně malá mocnina jde do $+\infty$ rychleji než $\ln x$, ale naopak e^x jde do $+\infty$ rychleji než libovolně velká mocnina.

$\boxed{x\to+\infty}$

konvergence k $+\infty$	konvergence k 0
e^x	$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
x^α	$\frac{1}{x^\alpha}$
x^β ($\beta<\alpha$)	$\frac{1}{x^\beta}$ ($\beta<\alpha$)
$\ln x$	$\frac{1}{\ln x}$

V tabulce jsou srovnány konvergence dle rychlosti od nejrychlejší (nahoře) k nejpomalejší (dole).

3.2. Klasifikace nekonečně malých a nekonečně velkých veličin, Symboly o, O.

Je-li $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, pak se někdy říká, že **f je v x_0 nekonečně malá**

Naopak, je-li $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, pak **f je v x_0 nekonečně velká**

Jsou-li f a g dvě různé funkce, které jsou v x_0 nekonečně malé (nebo nekonečně velké) je užitečné umět porovnat jejich rychlost s jakou malosti (velikosti) v x_0 nabydou (viz Tabulka na str. 3/7). Je také užitečné umět porovnávat funkce s komplikovaným zápisem s funkcemi elementárními.

Definice Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

[1] Píšeme $\boxed{f = o(g) \text{ pro } x = a}$ (a říkáme, že f je malé o funkce g pro $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv} \boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

[2] Píšeme $\boxed{f = O(g) \text{ pro } x = a}$ (a říkáme, že f je velké O fce g pro $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv} (\exists K \in \mathbb{R})(\exists \mathcal{P}(a)) \quad |f(x)| \leq K|g(x)|$$

[3] Píšeme $\boxed{f \sim g \text{ pro } x = a}$ (a říkáme, že f je <u>slabě ekvivalentní</u> s g pro $x=a$; nebo: f je <u>řádově stejná</u> jako g v $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

[4] Píšeme $\boxed{f \simeq g \text{ pro } x = a}$ (a říkáme: f je <u>silně ekvivalentní</u> s g pro $x=a$; nebo: <u>f se chová jako g</u> v $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Cvičení ① Ukažte, že relace $\boxed{f \sim g \text{ pro } x = a}$ je skutečně <u>ekvivalence</u> (tj. platí $f \sim f$ (reflexivita), $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ (symetrie), $(f \sim g) \wedge (g \sim h) \Rightarrow f \sim h$ (tranzitivita)

② Ukažte, že platí: (vše pro $x=a$)

(i) $f \sim g \Rightarrow f = O(g) \wedge g = O(f)$

(ii) $f \simeq g \Rightarrow f \sim g$

(iii) $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

(iv) $f_1 = O(g) \wedge f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(g)$

(v) $f = O(g) \wedge g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$

(vi) $f_i \sim g_i \ (i = 1,2) \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$, $\frac{f_1}{g_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ (ALE NIKOLIV $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$. Např. $f_1 = \sin x$, $f_2 = -\sin x$, $g_1 = x$, $g_2 = x$, v $a = 0$.)

(3) Ukažte, že zápis $f = O(1)$ znamená, že f je na nějakém prstencovém okolí omezená, tj. $\boxed{f = O(1)} \Longleftrightarrow \boxed{(\exists K>0)\,(\exists P_\delta(a))\ |f(x)| < K}$

$\boxed{\text{Příklady}}$ (1) Z Tabulky, str. 3/7, plyne $x^\alpha = o(e^x)$ pro $x=+\infty$ a také $\ln x = o(x^\alpha)$ pro $x=+\infty$ } pro $\alpha>0$ libovolné.

(2) Pro $x=0$ platí: $\sin x \simeq x$, $\operatorname{tg} x \simeq x$, $\cos x \simeq 1$, $\operatorname{cotg} x \simeq \frac{1}{x}$, $\arcsin x \simeq x$, ...

$1-\cos x \sim x^2$

(3) Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí: $x\sin x = O(x)$ neboť $|x \sin x| \le |x|$.

(4) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $\operatorname{tg} x - \sin x = o(x^\alpha)$ pro $x=0$.

Řešení: Protože

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^\alpha} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\,\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}}\,\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-3}},$$ tak

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^\alpha} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\alpha-3}} = 0 \Longleftrightarrow \alpha - 3 < 0 \Longleftrightarrow \boxed{\alpha < 3}$$

Protože pro $\alpha = 3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$$ tak $\boxed{\operatorname{tg} x - \sin x \sim x^3}$ a $\boxed{\operatorname{tg} x - \sin x \simeq \frac{x^3}{2}}$

---

(5) Nechť $\boxed{f = o(g) \text{ pro } x=a}$, f je "ošklivá"/komplikovaná fce a g je elementární fce ("pěkná").

Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to a} g(x) = 0 \\ \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \end{array} \right\}$ pak vyvozujeme: $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ a } f \text{ jde k } 0 \text{ rychleji než } g. \\ \text{buď } f \text{ je omezená v } P_\delta(a) \text{ nebo } f \text{ jde k } +\infty \text{ pomaleji než } g. \end{array} \right.$

3.3 LIMITY A MONOTÓNIE

V této sekci se zaměříme na funkce $f: \mathbb{R} \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$, $g: \mathbb{R} \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$, a budeme zkoumat vlastnosti limit založené na možnosti uspořádat (funkční) hodnoty f a g nebo jinou funkce f samotné.
(NELZE tedy předpokládat, že $f, g: \mathbb{R}$ do $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$.) K této sekci tématicky patří již dříve zformulované věty o strážnících (sendvičové věty).

Věta 3.8 (Limitní přechod v nerovnostech) Buďte f, g definované na okolí $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ($f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ale i $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pak $x_0 = +\infty$)

Jestliže:
- existuje $\lim_{x \to x_0} f(x)$ (a rovná se A)
- existuje $\lim_{x \to x_0} g(x)$ (a rovná se B)
- $(\exists P_\delta(x_0))\ (\forall x \in P_\delta(x_0))\quad f(x) \leq g(x)$

Pak:
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)}$$

Přechodem k limitě se uspořádání neztratí!

Příklad (který ukazuje, že nelze očekávat, že zesílením třetího předpokladu $\boxed{(\exists P_\delta(x_0))(\forall x \in P_\delta(x_0))\quad f(x) < g(x)}$ by mohlo platit silnější tvrzení $\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Uvažme např. ① $f(x) = x^2$ a $g(x) = |x|$, pak pro $0 < \delta < 1$ platí: $f(x) < g(x)$ $\forall x \in P_\delta(0)$.

Ale $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

② $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ a $g(x) = \frac{1}{x}$. Pak $f(x) < g(x)$ v $U_\delta(+\infty)$ pro $\forall \delta > 0$, ale $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Dk věty 3.8 Nechť pro jednoduchost $A, B \in \mathbb{R}$. Chceme ukázat, že $A \leq B$. Sporem předpokládejme, že $A > B$. Pak k $\varepsilon = \frac{1}{2}(A-B)$ najdu z existence limit $P_\delta(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$:

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}(A+B) = A - \tfrac{1}{2}(A-B) < f(x)} < A + \tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$B - \tfrac{1}{2}(A-B) < \underbrace{g(x) < B + \tfrac{1}{2}(A-B) = \tfrac{1}{2}(A+B)}$$

Z podtržených vztahů plyne: $g(x) < \frac{1}{2}(A+B) < f(x)$ $\forall x \in P_\delta(x_0)$
což je spor s třetím předpokladem věty 3.8. ▨

Věta 3.9. Buď $a<b$ a $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Označme $J:=(a,b)$.

Je-li f neklesající na (a,b), pak
$\{x<y \Rightarrow f(x)\le f(y)\}$
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to b-} f(x) = \sup f(J) \\ \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \inf f(J). \end{cases}$$

Je-li f nerostoucí na (a,b), pak
$\{x<y \Rightarrow f(x)\ge f(y)\}$
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to b-} f(x) = \inf f(J) \\ \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \sup f(J), \end{cases}$$

kde $\sup f(J)$ a $\inf f(J)$ chápeme v $\mathbb{R}^*$.

Dk: Věta 3.9 obsahuje mnoho variant, důkaz provedeme pro dvě z nich.

(i) Buď f neklesající v J a $\sup f(J)=+\infty$ (chceme ukázat:
$$\lim_{x\to b-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall L>0)(\exists \delta>0)\left(\forall x\in \begin{cases}(b-\delta,b) & \text{je-li } b\in\mathbb{R}\\ (\frac{1}{\delta},+\infty) & \text{je-li } b=+\infty\end{cases}\right) f(x)>L$$
Vzhledem k monotonii f stačí ukázat:
$(\Delta)\quad (\forall L>0)(\exists x_0<b)(f(x_0)>L)$
Nechť (Δ) neplatí. Pak $(\exists L>0)(\forall x_0<b)(f(x_0)\le L)$, což je však spor se skutečností, že $\sup f(J)=+\infty$.

(ii) Buď f nerostoucí v J a $\sup f(J)=A\in\mathbb{R}$. Chceme ukázat, že
$$\lim_{x\to a+} f(x)=A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(\forall x\in \begin{cases}(a,a+\delta) & \text{je-li } a\in\mathbb{R}\\ (-\infty,-\frac{1}{\delta}) & \text{je-li } a=-\infty\end{cases}\right) \text{ platí}$$
$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon,$$ což se redukuje na
$$A-\varepsilon < f(x)$$
Opět díky monotonii stačí ukázat, že
$(\tilde{\Delta})\quad (\forall \varepsilon>0)(\exists x_0>a)(f(x_0)>A-\varepsilon)$
Kdyby však $(\tilde{\Delta})$ neplatilo, tak $(\exists \varepsilon_0>0)(\forall x>a)(f(x)\le A-\varepsilon_0)$
což je $\lightning$ $\blacksquare$.

VÝZNAMNÝ DŮSLEDEK VĚTY 3.9. PRO POSLOUPNOSTI

Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí (nebo neklesající), pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje (vlastní či nevlastní). Neboli: **MONOTÓNNÍ POSLOUPNOST MÁ VŽDY LIMITU**

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí (nebo neklesající) a omezená zdola (nebo omezená shora), pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje a je vlastní.

neboli:

OMEZENÁ MONOTÓNNÍ POSLOUPNOST MÁ VŽDY VLASTNÍ LIMITU.