M. BULÍČEK & J. MÁLEK : MATEMATICKÁ ANALÝZA 1
NOFY151 , ZS 2019/20

Zahájení : přivítání
obecné informace
sylabus
nutné požadavky ke zkoušce

1. LIMITA, SPOJITOST, DERIVACE

1.1 ZÁKLADNÍ POJMY

MATEMATIKA, JEJÍ ROLE VE VĚDĚ, JEJÍ STRUKTURA

<u>Věda</u> jako celek představuje systematický, racionální a empirický způsob poznávání objektů a procesů reálného světa. Věda se štěpí (nejednoznačným a navzájem se stále více překrývajícím způsobem) na vědy

- přírodní (fyzika, biologie, chemie, ...)
- technické (inženýrství – aplikované vědy přírodní ...)
- lékařské či obecněji vědy o živé přírodě
- společenské (ekonomie, lingvistika, teologie, .. psychologie, ...

Vědní obory shrnují poznatky a usilují o porozumění souvislostí, vztahů, procesů, případně predikci či co nejlepší posouzení dané situace. Procesy, vztahy, souvislosti jsou popisovány verbálně a následně, ve snaze dosáhnout přesnějšího popisu, popisovány univerzálnějším jazykem – matematikou, která <u>intuitivní</u> mění v <u>konsistentní</u>.

Matematika je jazykem (přírodních) věd

Filosofie či počítačová věda jsou další vědní disciplíny s přesahem přes vědu jako celek.

Znám-li dobře češtinu, slovenštinu, angličtinu, ruštinu, či jakýkoliv jiný jazyk, což zahrnuje pravopis, gramatiku, výslovnost, slovní zásobu, literaturu,... mohu velmi dobře (verbálně či písemně) popisovat procesy (= život) kolem sebe.

Zcela podobně, čím lépe známe matematiku, tím lépe (přesněji) dokážeme popsat pozorované jevy, zpracovávat / interpretovat experimenty, hledat souvislosti a odhalovat věci jinak takřka neodhalitelné, zvláštа lépe rozumět dané "fyzikální" teorii.

MATEMATIKA (podobně jako jiný dorozumívací jazyk) má mnoho oblastí:

LOGIKA, ALGEBRA, GEOMETRIE, TEORIE MNOŽIN, MATEMATICKÁ ANALÝZA, ..., TOPOLOGIE,

které se často dále dělí.

Ačkoliv předmětem našeho kurzu je matematická analýza (což je, zhruba řečeno, studium nekonečných procesů, kde klíčovým pojmem je funkce), dnes se analýze věnovat nebudeme. Potřebujeme se nejdříve domluvit na základech matematické gramatiky (tj. logice) a zavést číselné množiny (spojené se základy algebry, teorie množin, teorie čísel).

ZÁKLADY LOGIKY

angl. sentence

Věty v běžné řeči nazýváme vyjádření (anglicky statements).
VÝROKEM rozumíme vyjádření, o kterém lze jednoznačně rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé.
Výrokům, které jsou pravdivé, přiřadíme hodnotu 1 (true T)
Výrokům, které jsou nepravdivé, přiřadíme hodnotu 0 (false F)

Výroky tak splňují dvě pravidla:
(i) dichotomie, které říká, že každý výrok musí mít hodnotu buď 0 nebo 1.
(ii) vyloučeného středu, které říká, že vyjádření, kterému nelze přiřadit jednoznačně hodnotu 0 nebo 1, není výrok.

VÝROKOVÝ POČET (tj. počítání s výroky) je založen na základních operacích s výroky popsaných v Tabulce 1.:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulka 1. Popis operací negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence.

Matematická tvrzení (výroky), zpravidla nazývané Věty (angl. Theorems), Lemmy, ..., jsou často ve tvaru implikace $\Rightarrow$ či ekvivalence $\Leftrightarrow$. Protože pravdivostní tabulka $A \Leftrightarrow B$ je stejná jako pravdivostní tabulka $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, tak se častá matematická tvrzení redukují na implikace $\Rightarrow$.

Protože (viz Tabulka 2) jsou výroky

- $A \Rightarrow B$
- $\neg B \Rightarrow \neg A$
- $\neg(A \wedge \neg B)$

z pohledu logiky stejné, neboť mají stejnou pravdivostní tabulku, tak rozlišujeme tři způsoby důkazu implikací:

PŘÍMÝ $A \Rightarrow B$
NEPŘÍMÝ $\neg B \Rightarrow \neg A$
SPOREM $\neg(A \wedge \neg B)$

které ilustrujeme na následujícím příkladě.

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1

Tabulka 2. Pravdivostní tabulky výroků $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$ a $\neg(A \wedge \neg B)$ jsou stejné.

Příklad Buď $n = 1, 2, 3, \dots$ neboť $n \in \mathbb{N}$ (množina přirozených čísel). Dokážeme trojím způsobem, že platí ~~tj~~ pro každé $n \in \mathbb{N}$ výrok: $\boxed{\text{Je-li } n^2 \text{ liché, pak } n \text{ je liché.}}$

Buď $n \in \mathbb{N}$ libovolné, ale pevné.

PŘÍMÝ DŮKAZ Protože n lze rozložit na součin prvočísel, máme $n = p_1 \cdots p_r$ a $n^2 = p_1^2 \cdots p_r^2$. Protože n^2 je liché, tak každé p_i^2, $i = 1, \dots, r$, je liché. Odsud a ze skutečnosti, že p_i je prvočíslo plyne, že p_i je liché. Pak však n = součin lichých čísel je liché. ▨

NEPŘÍMÝ DŮKAZ Dokazujeme implikaci

Není-li n liché (tj. n je sudé), pak není n^2 liché (tj. n^2 je sudé)

Dk Je-li n sudé, pak $n = 2k$ a pak $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ tedy n^2 je sudé. ▨

$\boxed{\text{Důkaz SPOREM}}$ Předpokládáme, že $\boxed{n^2 \text{ je liché}}$ a zároveň $\boxed{n \text{ je sudé}}$ a chceme nalézt nepravdivý výrok, neboli ~~spor~~ spor (značený ↯) s předpoklady. Je-li však n^2 liché a n sudé, pak n^2+n je liché a zároveň $n^2+n = n(n+1)$ je číslo sudé neboť [redacted] jedno z čísel n resp. $n+1$ musí být sudé. Tedy n^2+n má být liché i sudé, což je hledaný spor. ↯ ∎

Výše uvedený příklad je zajímavý ještě ze dvou důvodů.

$\boxed{\text{ZAPRVÉ}}$ Výrok „je-li n^2 liché, pak je n liché" závisí na parametru $n \in \mathbb{N}$. Lze jej tedy označit $V(n)$. Tvrzení, [redacted] které jsme dokázali třemi způsoby, říká, že $V(n)$ má platit pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což zapisujeme: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ V(n)}$

Symbol $\forall$ čteme "pro všechna" se nazývá obecný kvantifikátor

Negace výroku

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$ tzn. $(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)$

zní

Existuje $n \in \mathbb{N}$ neplatí $V(n)$.

Tento výrok zapíšeme

$(\exists n \in \mathbb{N})\, \neg V(n)$

Symbol $\exists$ čteme "existuje" se nazývá existenční kvantifikátor. Chceme-li zapsat "existuje právě jeden" píšeme $\exists!$. Někdy lze také vidět symbol $\exists_1$, který značí totéž.

$\boxed{\text{ZADRUHÉ}}$ Výrok (nebo výroková forma = výrok s kvantifikátory) $(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)$ kde $V(n)$ je např. "je-li n^2 liché, pak n liché" [redacted] je parametrizován množinou přirozených čísel, což je nejmenší induktivní množina v množině reálných čísel (viz později) a Takové tvrzení lze dokazovat principem indukce: (α) ověříme, že $V(n_0)$ platí pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ (typicky $n_0 = 1$)

(β) ověříme, že platí implikace: Pokud $V(n)$ pro $\forall n \leq n_0$, pak $V(n_0+1)$

Pro ilustraci dokažme naše jednoduché tvrzení z Příkladu metodou indukce.

$\boxed{\text{Ad } (\alpha)}$ $V(1)$ tj. "je-li 1^2 liché, pak 1 liché" platí ✓

$\boxed{\text{Ad }(\beta)}$ Předpokládejme, že $V(n)$ platí $\forall n \leq n_0$. Chceme dokázat $V(n_0+1)$ tj. "je-li $(n_0+1)^2$ liché, pak n_0+1 je liché"

Avšak: $\underbrace{(n_0+1)^2}_{\text{liché}} = n_0^2 + 2n_0 + 1 = (n_0-1)^2 + \underbrace{4n}_{\text{sudé}} \Rightarrow (n_0-1)^2$ je liché

$2n_0$ sudé, 1 liché $\Rightarrow$ n_0^2 sudé

Pro n_0^2 nelze indukční předpoklad použít

pak z indukčního předpokladu n_0-1 je liché, a tedy n_0+1 je rovněž liché.

Můžeme (a budeme) mít výroky (výrokové formy), které závisí na více. Uvažujme pro jednoduchost situaci, kdy výrok závisí na dvou parametrech $x \in X$ a $y \in Y$, tj. $V(x,y)$. Pak jsou možné tyto kombinace kvantifikátorových forem:

1a $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ V(x,y)$	1b $(\forall y \in Y)(\forall x \in X)\ V(x,y)$
2a $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ V(x,y)$	2b $(\exists y \in Y)(\forall x \in X)\ V(x,y)$
3a $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)\ V(x,y)$	3b $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ V(x,y)$
4a $(\exists x \in X)(\exists y \in Y)\ V(x,y)$	4b $(\exists y \in Y)(\exists x \in X)\ V(x,y)$

Výroky Na a Nb se liší pořadím kvantifikátorů. U výroků se stejnými kvantifikátory na pořadí nezáleží, neboť je můžeme zapsat $(\forall (x,y) \in X \times Y)\ V(x,y)$ resp. $(\exists (x,y) \in X \times Y)\ V(x,y)$

Tedy 1a a 1b jsou ekvivalentní a podobně 4a a 4b.

NAOPAK, 2a a 2b a podobně 3a a 3b ekvivalentní NEJSOU, a pořadí kvantifikátorů je extrémně důležité jak podtrhuje následující příklad.

Příklad M množina mužů, $Ž$ množina žen, $V(m,ž)$ označuje výrok "$ž$ je matkou m". Pak

$(\forall m \in M)(\exists ž \in Ž)\ V(m,ž)$ je pravdivý výrok

zatímco

$(\exists ž \in Ž)(\forall m \in M)\ V(m,ž)$ je výrok nepravdivý.

Cvičení: Napište si negace obou výroků a rozhodněte zda jsou pravdivé.