Termín pro odevzdání: čtvrtek 25. března 2021

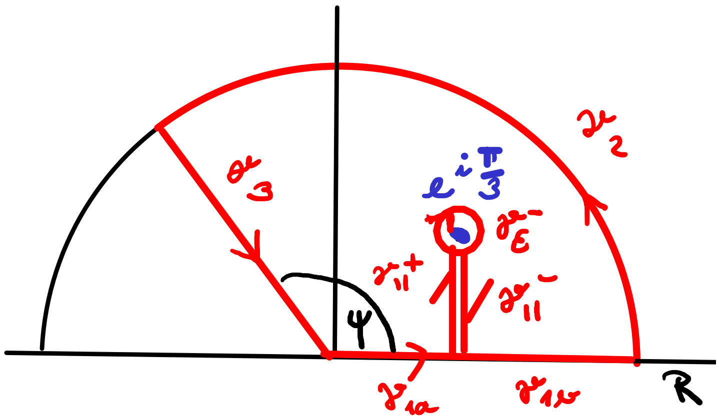
Mějme funkci

$$f(z) = \frac{z}{z^3+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Uvažujme křivku γ, která vznikne součtem křivek γ_{1a}, $\gamma_{||}^+$, γ_{ϵ^-}, $\gamma_{||}^-$, γ_{1b}, γ_2 a γ_3 (viz obrázek 1):

$$\gamma_{1a} + \gamma_{1b} = \gamma_1 : z = t,\ t \in [0, R],\ R > 1$$
$$\gamma_2 : z = Re^{i\varphi},\ \varphi \in [0, \psi],\ 0 < \psi < \pi$$
$$\gamma_3 : z = te^{i\psi},\ t \in [R, 0],\ R > 1$$
$$\gamma_{\epsilon^-} : z = e^{i\frac{\pi}{3}} + \epsilon e^{i\phi},\ \varphi \in [\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}],\ \epsilon > 0, \epsilon \text{ malé.}$$

1. Ukažte, že $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$ a $\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z$ jsou si pro vhodné ψ (tj. $\psi = \frac{2}{3}\pi$) rovny až na multiplikativní konstantu.
2. Pomocí odhadu ukažte, že platí $\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0$ pro $R \to \infty$.
3. Vypočítejte $\int_{\gamma_\epsilon^-} f(z)\mathrm{d}z$, vyšetřete $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon^-} f(z)\mathrm{d}z$.
4. S pomocí předchozích výsledků ukažte, že platí $I = \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.



Obrázek 1: