$\boxed{2}$ Posloupnosti a řady funkcí

$\boxed{2.1}$ Bodová a stejnoměrná konvergence

Uvažujme posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcí z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.

Označme $M := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \lim_{n\to\infty} f_n(z) \text{ existuje}\}$

a

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \text{pro } z \in M$$

Definice Řekneme, že f_n konvergují k f bodově v M, a píšeme $\boxed{f_n \to f \text{ v } M}$, právě když

$$(\forall z\in M)(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon, z))(\forall n \geq n_0)\; |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

OTÁZKY

(1) Je-li $f_n \in C(M)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ a $f_n \to f$ v M, je pak $f \in C(M)$?

Podobně se lze ptát zda se při limitním přechodu (bodové konvergenci) zachovávají další vlastnosti:

- spojitost derivací
- integrovatelnost

Otázka spojitosti znamená, že pro libovolné $z_0 \in M$, (o kterém víme, že $f_n(z_0) \to f(z_0)$, a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{z\to z_0} f_n(z) = f(z_0)$)

chceme ukázat, že

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Toto lze zapsat také jako otázku:

Platí:

$$(*) \qquad \lim_{z\to z_0} \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z) \;?$$

Tedy jako otázka o zaměnitelnosti limit:

· Stačí bodová konvergence k tomu, aby bylo možné zaměnit limity a platil vztah $(*)$?

② Podobně se můžeme ptát, zda bodová konvergence stačí k platnosti

(**) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim f_n(x)\,dx \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

tj., zda lze zaměnit integrál a limitu.

③ Platí následující vztahy?

věta o derivování součtu

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} s_n(z)\right)' \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} s_n'(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(z) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$$

n-tý částečný součet $\sum_{k=1}^{n} f_n(z)$

Neboli, lze prohodit limitu a derivování či spočítat derivaci součtu funkcí jako součet derivací jednotlivých členů?

④ Vznikne součtem $\left(\sum_1^\infty f_n\right)$ spojitých funkcí vždy spojitá funkce?

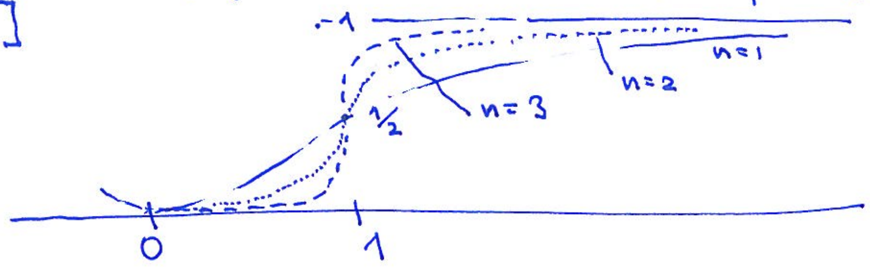
NÁSLEDUJÍCÍ PŘÍKLADY ukazují, že bodová konvergence NESTAČÍ a některé nezaručují/nedávají kladnou odpověď na výše uvedené otázky.

Příklad 1 Buď $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované vztahem $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

Zřejmě $f_n \in C(\mathbb{R})$, f_n sudá a platí (zkoumáním různých limit $f_n(x)$ pro $|x|>1$, $|x|=1$ a $|x|<1$)

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |x|>1 \\ 1/2 & \text{pro } |x|=1 \\ 0 & \text{pro } |x|<1. \end{cases}$$ viz obr. 1

Tedy $f \notin C(\mathbb{R})$ a vidíme, že bodová konvergence $\{f_n\}$ nezachovává obecně spojitost. [Všimněme si, že $f \in C((-1,1))$ a $f \in C((1,\infty))$.]



obr. 1

Příklad 2 Buď $f_n(x) = n^2 x (1-x)^n$ uvažované na $\langle 0,1\rangle$.

Ukážeme, že (i) $f_n(x) \longrightarrow 0$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \;(=0)$

Tedy, tento příklad ukazuje, že bodová konvergence nestačí na záměnu integrálu a limity.

<u>Řešení</u> Pozorujeme, že $f_n(0) = f_n(1) = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pro $x \in (0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} x\, n^2 (1-x)^n = x \lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{(1-x)^{-y}} = x \lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{\exp\big(\underbrace{-\ln(1-x)}_{\text{pro pevné } x\in(0,1) \text{ je toto kladná konst.}}\, y\big)} = 0$$

Tedy pro $x \in \langle 0,1\rangle$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

$$\boxed{f_n \to 0 \quad \text{na } \langle 0,1\rangle}$$

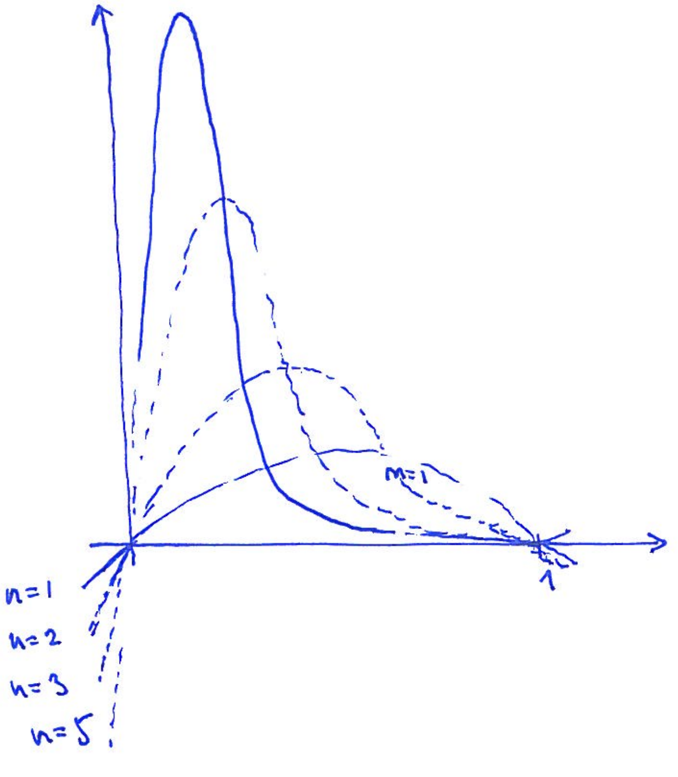
Dále

$$\int_0^1 f_n(x) = n^2 \int_0^1 \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\overset{u}{x}}\; \underset{\substack{\downarrow \\ -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}}}{(1-x)^n}\, dx = -\frac{n^2}{n+1}\underbrace{\left[x(1-x)^{n+1}\right]_0^1}_{=0} + \frac{n^2}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,dx$$

$$= -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\left[(1-x)^{n+2}\right]_0^1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 1 \quad \text{pro } n\to\infty.$$

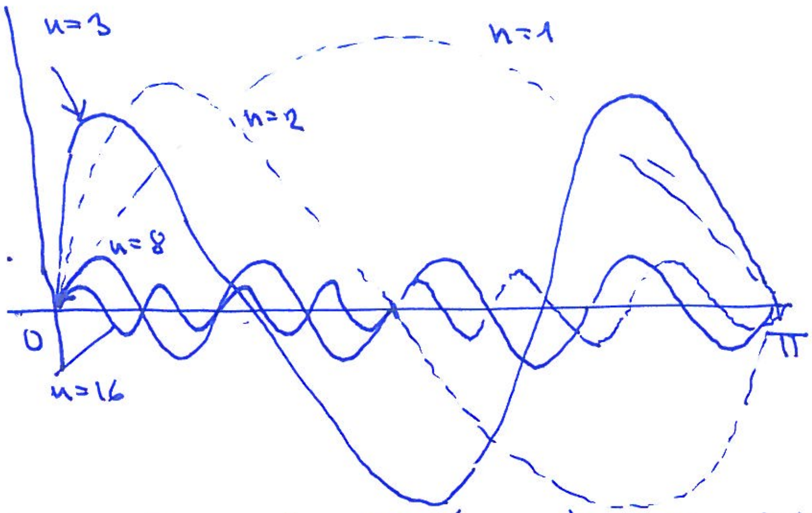
Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx$$



Obr. 2

Příklad 3 Posloupnost funkcí $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $(x \in \mathbb{R})$ konvergují bodově k 0: $f_n(x) \to 0$ pro $n \to \infty$ a $x \in \mathbb{R}$ libovolné, ale $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$ nemá bodovou limitu v žádném bodě.



obr. 3

Připomeň: $f_n \to f$ v M (bodově) $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists N_0 = N_0(x,\varepsilon))(\forall n > N_0)$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Existuje-li však N_0 vždy stejné pro všechna $x \in M$ mluvíme o konvergenci stejnoměrné.

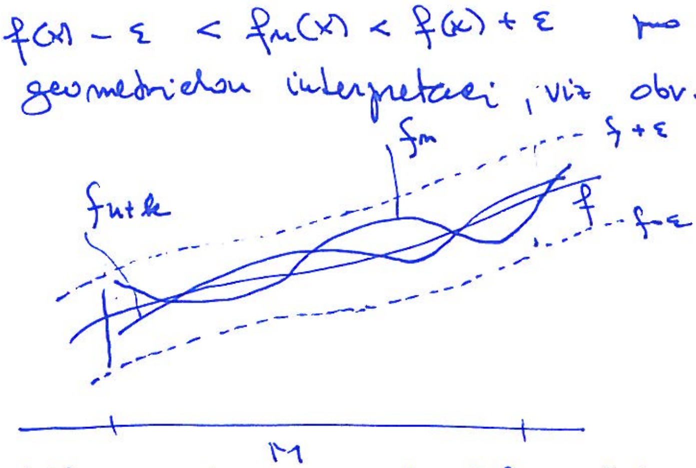
Definice Řekneme, že f_n konvergují k f stejnoměrně v M, píšeme $f_n \rightrightarrows f$ v M pro $n \to \infty$, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 = N_0(\varepsilon))(\forall x \in M)(\forall n \geq n_0)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Jsou-li $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pak má stejnoměrná konvergence zapsaná ve tvaru

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \quad \text{pro } \forall x \in M \text{ a } \forall n \geq N_0$$

názornou geometrickou interpretaci, viz obr. 4.



obr. 4

Cvičení Vyjděte z této geometrické představy a rozhodněte, na jakých množinách $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Příkladů 1, 2, 3 konvergují stejnoměrně.

Definice Řekneme, že f_n konvergují k f lokálně stejnoměrně v M, píšeme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ v M, právě když $\forall K \subset M$ kompaktní (tj. uzavřený & omezený) $f_n \rightrightarrows f$ v K.

$\boxed{\text{Věta 1}}$ KRITÉRIUM STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE

Buď $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Platí

$$f_n \rightrightarrows f \text{ v } M \text{ pro } n \to \infty \iff \sigma_M := \sup_{z \in M} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Dk $f_n \rightrightarrows f$ v M pro $n \to \infty$

$$\Updownarrow$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0)(\forall n \geq N_0)(\forall z \in M) \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$
$$\Updownarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0)(\forall n \geq N_0) \quad \underbrace{\sup_{z \in M} |f_n(z) - f(z)|}_{\sigma_n} < \varepsilon$$
$$\Updownarrow \quad \sigma_n \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Příklad Vraťme se k Příkladu 2 a ukažme, že v $\langle 0,1\rangle$ f_n konvergují k f stejnoměrně. Protože $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ jsou v $C^\infty(\langle 0,1\rangle)$ a $f_n(0) = f_n(1) = 0$, tak f_n nabývá v $(0,1)$ maximum (a když také $|f_n - f| = f_n - 0 = f_n$) v bodě, kde $f_n'(x) = 0$.

$$f_n'(x) = 0 \iff f_n'(x) = n^2(1-x)^{n-1}\left[1 - x - nx\right] = 0 \iff x_{max}^n = \frac{1}{n+1}$$

A tedy $\sigma_n = f_n(x_n) = \dfrac{n^2}{1+n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = n \underbrace{\dfrac{n}{n+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}}_{\to \frac{1}{e}} \to +\infty.$

Tedy, f_n nekonvergují k f stejnoměrně na $\langle 0,1\rangle$.
Pokud však uvažujeme interval $\langle \delta, 1\rangle$ pro $\delta > 0$, tak od jistého n_0 bude $x_{max}^n < \delta$ pro $\forall n \geq n_0$. Pak pro tato $n \geq n_0$ je $\sigma_n := \sup_{x \in \langle \delta, 1\rangle} f_n(x) = f_n(\delta) \to 0$ as $n \to \infty$.

Shrňme si získané výsledky: (i) $f_n \not\rightrightarrows f$ na $\langle 0,1\rangle$
(ii) $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle \delta, 1\rangle$ pro $\forall \delta > 0$ a tedy
(iii) $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(0,1\rangle$ $(n \to \infty)$

$\boxed{\text{Věta 2}}$ (Bolzano-Cauchyho podmínka stejnoměrné konvergence)

$$f_n \rightrightarrows f \text{ v } M \ (n\to\infty) \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n,m \geq n_0)(\forall z\in M)\, |f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$$

Kontrolní otázka: Proč je Bolzano-Cauchy podmínka důležitá pro charakterizaci stejnoměrné konvergence?

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ plyne z Δ-nerovnosti: $|f_n(z)-f_m(z)| = |f_n(z)-f(z)+f(z)-f_m(z)|$
$$\leq |f_n(z)-f(z)| + |f_m(z)-f(z)|$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Volme $z\in M$ libovolné, ale pevné. Pak z předpokladu plyne, že $\{f_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ splňuje B-C podmínku pro posloupnosti. Existuje tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, označme ji $f(z)$. Máme nyní kandidáta na limitní funkci – zbývá ověřit, že vskutku $f_n \rightrightarrows f$ v M.

Buď $n>n_0$ pevné a $m = n_0+1, n_0+2, \dots, n_0+k, \dots$
Pak z předpokladu plyne, že $\forall z\in M$ a $\forall m>n_0$
$$|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$$
Tedy
$$\lim_{m\to\infty} |f_n(z)-f_m(z)| \leq \varepsilon$$
Ale
$$\lim_{m\to\infty} |f_n(z)-f_m(z)| = |f_n(z)-f(z)|$$ ▨

$\boxed{\text{Věta 3}}$ (O záměně limit a zachování spojitosti)
Buď $f, f_n : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ takové, že
(P1) $\quad f_n \rightrightarrows f$ v M
a
(P2) $\quad$ pro nějaké $x_0\in M$ takové, že $U(x_0)\subset M$ existují $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) =: c_n$

Pak
(T1) $\quad$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n =: c$
(T2) $\quad c = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ neboli $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Speciálně: Jsou-li $f_n\in C(M)$ a $f_n \rightrightarrows f$ v M, pak $f\in C(M)$
(stejnoměrná konvergence zachovává spojitost)

[Stejnoměrná konvergence je postačující podmínka k zachování spojitosti. Příklad 2 však ukazuje, že zdaleka není podmínkou nutnou: $\{f_n\}$ v Př. 2 nekonvergují k $f\equiv 0$ stejnoměrně na $\langle 0,1\rangle$, přesto je f spojitá.] ▨

(Dk) $\boxed{T1}$ z (P1) plyne $(\exists n_0)(\forall n, m \geq n_0)(\forall x \in M)$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Z existence limit, tj. (P2), pak plyne, že

$$|c_n - c_m| \leq \varepsilon.$$

Tedy $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a má v $\mathbb{R}$ limitu. (T1) je dokázáno.

[T2] $$|c - f(x)| = |c - c_n + c_n - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$$
$$\leq |c - c_n| + |c_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$

Zde n je dostatečně velké, ale pevné a takové, že 1. člen je $\leq \varepsilon$ z první části důkazu, 3. člen je $< \varepsilon$ díky (P1) a $|c_n - f_n(x)| < \varepsilon$ pro $x \in P(x_0)$ díky (P2). Ukázali jsme tedy, že pro dané 3ε $\exists P(x_0)$ tak, že pro $\forall x \in P(x_0)$: $|c - f(x)| < 3\varepsilon$. ◻

Cvičení Dokažte SPECIÁLNĚ (které plyne z právě dokázaného) přímo.

(Dk) cvičení Buď $x_0 \in M$ libovolné, pevné. Chceme ukázat, že

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Víme, že $(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall x \in M)\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (plyne z (P1)).

Protože f_{n_0} je spojitá v x_0, $\exists U(x_0)\ \forall x \in U(x_0)\ |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Pro $x \in U(x_0)$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{z (P1)}}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{\text{z } f_{n_0} \in C(U(x_0))} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{z (P1)}}}$$

a

◻

$\boxed{\text{Věta 4}}$ (O záměně limity a integrálu)

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle$ $(n\to\infty)$ a $\{f_n\} \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ $(\forall n)$

Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle) = \{u : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R} ; (R)\int_a^b f(x)\,dx < +\infty\}$

Navíc

(1) Definujeme-li $F_k(x) := \int_a^x f_k(t)\,dt$ a $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$,
pak $F_k \rightrightarrows F$ v $\langle a,b\rangle$ $(k\to\infty)$

(2) Speciálně

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim f_n(t)\,dt$$

(Dk) Skutečnost, že $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ je intuitivně zřejmé (Riemannův integrál je budován k výpočtu obsahu) A geometrické interpretace stejnoměrné konvergence.

Dále:

$$\sup_{x\in\langle a,b\rangle} |F_k(x) - F(x)| = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} \left| \int_a^x f_k(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right|$$

$$\leq \sup_{x\in\langle a,b\rangle} \int_a^x |f_k(t) - f(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^b |f_k(t) - f(t)|\,dt$$

$$\leq \sup_{t\in\langle a,b\rangle} |f_k(t) - f(t)|\,(b-a)$$

$\to 0$ dle Věty 1. ■

Pozorování: Opět je i v této situaci stejnoměrná konvergence „jen" postačující podmínka, jak ukazuje následující (proti)příklad: $f_n(x) = x^n$ na $\langle 0,1\rangle$.

Pak $f_n(x) \to \begin{cases} 0 & x \in \langle 0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Tedy $f_n \not\rightrightarrows f$ v $\langle 0,1\rangle$; ale

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim x^n\,dx.$$ ■.

$\boxed{\text{Věta 5}}$ (O záměně limity a derivace)

Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou definovány na $I \subset \mathbb{R}$ interval.
Nechť

(P1) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)$ $f_n'(x)$ existuje

(P2) $f_n' \rightrightarrows G$ na I

(P3) $(\exists x_0 \in I)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ existuje

Pak

(T1) Pro $(\forall x \in I)$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$

(T2) Pro $\forall I' \subset I$ omezený: $f_n \rightrightarrows f$ v I'

(T3) $\lim f_n'(x) = (\lim f_n(x))' = f'(x)$, což implikuje $\boxed{G = f'}$ a existenci $f'(x)$ $\forall x \in I$.

Pozorování: (1) Příklad (3) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ ukazuje, že stejnoměrná konvergence $f_n \rightrightarrows f$ zdaleka na záměnu derivace a limity nestačí!!

(2) Posloupnost $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + n$ naopak ukazuje, že potřebuji konvergenci alespoň v jednom bodě. Vskutku, $f_n'(x) = x^n \rightrightarrows 0$ na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ale limita vlastní pro $f_n(x)$ s $n \to \infty$ neexistuje pro $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Tedy o f nelze vůbec mluvit.

(Dk) $\boxed{\text{Ad (T1) a (T2)}}$ Ověříme platnost B-C podmínky (viz Věta 2)

Protože dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (LVOSH)

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x) - f_m(x) - \big(f_n(x_0) - f_m(x_0)\big) + f_n(x_0) - f_m(x_0)$$
$$= \big(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big)(x - x_0) + f_n(x_0) - f_m(x_0)$$

pro jisté ξ mezi x_0 a x, dostáváme

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|\,|x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| =: I_1 + I_2$$

Protože $I' \cup \{x_0\} \subset \langle -K, K \rangle$ pro jisté $K > 0$, a díky (P2) $\exists n_0$ $\forall n, m \geq 0$ je $|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{4K}$ pro $\forall \xi \in I$, a díky (P3) je $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, dostáváme:

K danému $\varepsilon>0$ jsme našli $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall\, n,m \geq n_0$ a pro všechna $x \in I'$: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.
Dle Věty 2, tvrzení (T1) a (T2) platí.

$\boxed{\text{Ad (T3)}}$ Chceme ukázat, že pro $x \in I'$

$$(*)\quad \lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{m\to\infty}\frac{f_m(x+h)-f_m(x)}{h},$$

přičemž víme, že levá strana $= \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = G(x)$.

Záměna limit v $(*)$ platí, pokud dle Věty 3,

$$g_n(h) := \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}$$ dodefinované pro $h=0$

spojitě, tj. $g_n(0) = f_n'(x)$, konvergují stejnoměrně na $[0, h_0]$.

Avšak

$$g_n(h) - g_m(h) = \frac{(f_n-f_m)(x+h) - (f_n-f_m)(x)}{h}$$

$$\underset{\substack{\text{Lagrangeova}\\ \text{věta o}\\ \text{střední hodnotě}}}{=} (f_n' - f_m')(\xi),$$ kde ξ leží mezi x a $x+h$.

Tedy $$|g_n(h) - g_m(h)| \leq |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|$$

a (P2) implikují, že

$$g_n \rightrightarrows \begin{cases} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ f'(x) \end{cases} \text{ na } [0, h_0]$$

Tedy $(*)$ platí, a protože pravá strana $= f'(x)$, tvrzení (T3) je dokázáno.

<u>Pozorování</u> (i) Uvažujme lineární (vektorový) prostor $C(\langle a,b\rangle)$ s normou $\|g\|_\infty = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |g(x)|$.

Ukážeme, že $X := (C(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný a konvergence $f_n \to f$ v tomto prostoru je konvergence stejnoměrná. Vskutku, máme-li $\{f_n\} \subset X$ cauchyovskou, pak

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,m \geq n_0\ \forall x\in\langle a,b\rangle\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

což dle Věty 2 implikuje, že

$f_n \rightrightarrows f$ v $\langle a,b\rangle$.

Protože $f_n \in C(\langle a,b\rangle)$, věta 3 implikuje existenci $f\in C(\langle a,b\rangle)$ tak, že $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ (pro $n\to\infty$). $\boxtimes$

(ii) Naopak, je snadné najít $\{f_n\} \subset C(\langle a,b\rangle)$ tak, že

$\int_a^b |f_n - f_m|\,dx < \varepsilon$ pro $n,m \geq n_0$ od jistého n_0.

ale $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \notin C(\langle a,b\rangle)$. Tedy

$$\left(C(\langle a,b\rangle); \|f\|_1 := \int_a^b |f|\,dx\right)$$ je lineární, ale <u>není</u> úplný.

(iii) Příklad ③ výše ukazuje, že

$$\left(C^1(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_\infty\right)$$ není úplný

(iv) Avšak, $\left(C^1(\langle a,b\rangle); \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)$ je úplný.

<u>Pozorování</u> Řekneme, že <u>$\{f_n\}$ je v M stejně omezená</u> $\equiv^{df}$

$(\exists K>0)(\forall x\in M)\ |f_n(x)| \leq M$.

<u>Platí</u> (dokažte si sami) $f_n \rightrightarrows f$ v M, pak $\{f_n\}$ stejně omezená.

Z tohoto tvrzení ihned plyne, že posloupnost v Příkladu ② nekonverguje stejnoměrně na $\langle 0,1\rangle$.

$\boxed{2.2}$ Řady funkcí

Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Řekneme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ konverguje (k } s) \text{ v } M \begin{cases} \text{BODOVĚ} \\ \text{STEJNOMĚRNĚ} \end{cases} \overset{df}{\equiv} \begin{matrix} s_n \to s \text{ v } M \\ s_n \rightrightarrows s \text{ v } M. \end{matrix}$$

$$\left[\text{Píšeme: } \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n = s \quad \text{STEJNOMĚRNĚ v } M. \end{cases} \right]$$

$\boxed{\text{Věta } 2^*}$ (B.-C. podmínka stejn. konvergence řad)

$\sum f_n$ konverguje v M stejnoměrně $\equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall z \in M$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{Věta } 3^*}$ (O záměně Σ a lim, o zachování spoj.)

Buď $f_n \in C(M)$ a $\sum f_n$ konverguje v M stejnoměrně, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C(M)$

(Dk) $f_n \in C(M) \Rightarrow s_n \in C(M)$ a dle Věty 3 $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C(M)$ ◻

$\boxed{\text{Věta } 4^*}$ (O záměně $\int$ a Σ) Buď $f_n \in R(\langle a,b \rangle)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na $\langle a,b \rangle$.

Pak $s \in R(\langle a,b \rangle)$ a $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

$\boxed{\text{Věta } 5^*}$ (O záměně Σ a derivace) Nechť $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ splňují

(P1) $f_n'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a,b)$

(P2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje v (a,b) stejnoměrně (k G)

(P3) $\exists x_0 \in (a,b)$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) < +\infty$.

Pak (T1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně v (a,b)

a

(T2) Pro $\forall x \in (a,b)$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = s'(x)$.

$\boxed{\text{Kritéria stejnoměrné konvergence řad funkcí}}$

Věta 6 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řad)
Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergují stejnoměrně v M, pak $f_n \rightrightarrows 0$ v M

Dk plyne z B.-C. podmínky (Věta 2*), kde vezmeme $p=1$.
Pak
$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall z \in M \quad |f_n(z)| < \varepsilon,$$
což jest definice $f_n \rightrightarrows 0$ v M. ■

Věta 7 (Weierstrassův test) Buď $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \in \mathbb{R}^+$,
a $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in M$.
Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konvergují stejnoměrně v M, pak

- $\sum f_n$ konvergují v M stejnoměrně
- $|\sum f_n| \leq \sum |f_n| \leq \sum g_n$

Speciálně: Buď a_n posloupnost čísel : $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in M$

Pokud $\sum a_n < +\infty$, pak $\sum f_n$ konv. stejn. v M.

Dk Sami pomocí B.-C. podmínky.

Př. 4 $\sum \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ konvergují stejn. v $\mathbb{R}$ neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$
a $|\sin nx| \leq 1$.

Př. 5 Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci $\sum \frac{x}{1+n^2x^2}$.

Řešení Bodová konv.: $\frac{x}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2} \frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right)} \leq \frac{1}{n^2}\frac{1}{x}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x} < +\infty$
$\forall \underset{0 \neq}{x} \in \mathbb{R}$

$x=0 \quad \sum \frac{x}{1+n^2x^2} = 0.$

$$\boxed{\sum \frac{x}{1+n^2x^2} < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Stejnoměrná konv.

Hledejme nejdříve $\max\limits_{x\in\langle 0,\infty)} f_n(x)$.

$$f_n'(x)=0 \iff \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=0 \iff x=\frac{1}{n}$$

Avšak
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n}=+\infty .$$

Tedy nevíme, zda $\sum f_n$ konv. stejnoměrně.

Negace B-C podmínky $\equiv \exists \varepsilon_0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists n_0, p_0$ a $\exists x_0\in M$
$$\left|\sum_{n_0+1}^{n_0+p_0} f_n(x_0)\right|>\varepsilon_0$$

Volme $p_0=n_0$,
$$\sum_{n=n_0+1}^{2n_0}\frac{x}{1+n^2x^2}\geq \underset{\substack{\uparrow\\ \text{členů}}}{n_0}\ \frac{x}{1+4n_0^2x^2}=g(x)$$

$$g'(x)=\frac{n_0\left[(1+4n_0^2x^2)-8n_0^2x^2\right]}{(1+4n_0^2x^2)^2}=0$$

$$x=\frac{1}{2n_0}$$

A vidíme, že

$$g\left(\frac{1}{2n_0}\right)=\frac{\cancel{n_0}\dfrac{1}{2\cancel{n_0}}}{1+\cancel{4n_0^2}\dfrac{1}{\cancel{4n_0^2}}}=\frac{1}{4}$$

volíme-li $\varepsilon_0=\frac{1}{8}$, pak jsme negaci B-C podmínky ověřili a tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$ nekonvergují stejnoměrně

$\boxed{\text{Věta 8}}$ (Leibnitzova) Jsou-li $\{f_n\} : M \to \mathbb{R}$ takové, že $0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ $\forall x \in M$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x) \text{ konv. stejn. v } M \iff f_n \rightrightarrows 0 \text{ v } M.$$

Dk $\boxed{\Longrightarrow}$ Viz Věta 6

$\boxed{\Longleftarrow}$ Díky monotónii jsou částečné součty S_{2n} neklesající a odhadnuty $f_1(x)$. Tedy bodově konvergují. Rovněž $s_{2n+1} = S_{2n} + f_{2n+1}$ konvergují k limitě. bodově Navíc, $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_k(x)\right| \le f_{n+1}(x)$. ⊡

$\boxed{\text{Věta 9}}$ (Dirichletův test) Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\{g_n\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

(P1) $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $F_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, jsou stejně omezené v M

(P2) $\forall x \in M$ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a $g_n \rightrightarrows 0$ v M.

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ konverguje stejn. v M.

Dk Ukažte indukcí, že platí diskrétní verze integrace per-partes

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} F_k(x)\big(g_k(x) - g_{k+1}(x)\big) + g_n(x) F_n(x)$$

Odsud plyne:

$$s_{n+p}(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} F_k(x)\big(g_k(x) - g_{k+1}(x)\big) + g_{n+p} F_{n+p} - g_n(x) F_n(x)$$

Tak pro libovolné $x \in M$, z (P1) a monotónie $\{g_n(x)\}$ plyne

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x)\right| = |s_{n+p}(x) - s_n(x)| \le K |g_n(x) - g_{n+p}(x)| + K\big[|g_{n+p}(x)| + |g_n(x)|\big]$$

Ze stejnoměrné konvergence $g_n \rightrightarrows 0$ však najdeme n_0 tak, že $\forall\, n, n+p \ge n_0$ $\forall x \in M$ $|g_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{4K}$.

Pak $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x)\right| < \varepsilon$ a dle B.-C. podmínky je tvrz. dokázáno. ⊡

Příklad 6 Uvažme $f_n(x) = e^{inx}$. Pak

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} \underset{\uparrow \text{ geom. řada}}{=} e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}\frac{e^{in\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{\frac{e^{-in\frac{x}{2}}-e^{in\frac{x}{2}}}{2i}}{\frac{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}{2i}}$$

$$= e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

a tedy

$$|F_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \qquad \forall x \in \langle \delta, 2\pi-\delta\rangle \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Tedy $\{F_n\}$ je stejně omez. v $\langle \delta, 2\pi-\delta\rangle$.

z Dirichletova testu tak např. plyne, že
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ konverguje stejnoměrně na $\langle \delta, 2\pi-\delta\rangle$ ☒

Věta 10 (Abelův test) Nechť $\{f_n\}, \{g_n\}$ jako ve větě 9.
Nechť (P1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně v M
(P2) $\forall x \in M$ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a $\{g_n\}$ je stejně omezená

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ konverguje stejnoměrně v M.

(Dk) Sami modifikací důkazu věty 9.