Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

[8] 1.
- Zformulujte tvrzení o derivování podílu dvou funkcí g, h v bodě x intervalu (a, b).
- Buď $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ daná prostá funkce, zobrazující (a, b) na $(A, B) \subset \mathbb{R}$. Uveďte definici funkce f^{-1}, inverzní funkce k funkci f (samozřejmě včetně definičního oboru a oboru hodnot).
- Uveďte definici funkce cotg (kotangens) a výčet jejich vlastností: definiční obor, spojitost, obor hodnot, monotónii a vzoreček pro derivaci, vše s krátkým vysvětlením, odkud tyto vlastnosti plynou.
- Uvažujte funkci cotg zúženou na interval $(0, \pi)$. Vysvětlete, proč k této funkci existuje funkce inverzní, označme ji, jak je zvykem, $\operatorname{arccotg} := (\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)})^{-1}$.
- Zformulujte přesně větu o spojitosti a derivování inverzní funkce (včetně vzorečku pro derivaci f^{-1}), ve tvaru vhodném pro výpočet (odvození) vzorečku pro funkci arccotg. K zjednodušení by měl stačit vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

[8] 2.

- Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Naznačte hlavní ideu důkazu.
- Zadefinujte pro $f : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ jednostrannou derivaci $f'(a+)$ a předpokládejte, že $f'(x)$ existují pro $x \in (a, b)$. Uveďte podmínku na funkci f, která stačí k tomu, aby platilo

$$f'(a+) = \lim_{x \to a+} f'(x). \tag{1}$$

- Tvrzení zaručující platnost (1) zformulujte a dokažte.
- Lze použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkci $x^2|x|$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$? Zdůvodněte. Nakreslete pečlivý náčrtek situace.

[8] 3. Rozhodněte, zda platí tyto ekvivalence (pokud platí nějaká implikace, tak ji dokažte, pokud si myslíte, že neplatí, uveďte protipříklad):

1. Funkce f má v $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $\iff$ existuje $P_\delta(x_0)$ na kterém je f omezená.
2. $f'(x_0) \leq 0$ pro všechna $x_0 \in (a, b)$ $\iff$ f je v (a, b) nerostoucí.
3. Funkce f má v $x_0 \in (a, b)$ lokální minimum a $f'(x_0)$ existuje $\iff$ $f'(x_0) = 0$.

Součástí řešení jsou i definice pojmů, které se ve výše uvedených tvrzeních vyskytují.