31/5/2021

Teorie distribucí (Přednáška 7)

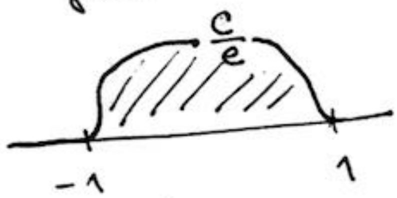
Program $\boxed{17.4}$ "Bump"-fce. Regularizace (zhlazování) funkcí.
Hustota $\mathcal{D}(\Omega)$ fcí v $L^p(\Omega)$.
Lemma $f\in L^1_{loc}$: $\int_\Omega f\varphi = 0 \ \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow f=0$ s.v. v Ω

$\boxed{17.5}$ Řád a nosič distribucí. Strukturní distribuce.

$\boxed{17.6}$ Součin, tensorový součin a konvoluce distribucí.

$\boxed{17.4}$ "Bump" (nárazové) fce $\omega(x) = C\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & x\in B_1(0)\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$

kde $C>0$ je takové, že $\int_{\mathbb{R}^d}\omega(x)\,dx=1$



$\Rightarrow \omega\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$; $\operatorname{supp}\omega = \overline{B_1(0)}$, $\int_{\mathbb{R}^d}\omega\,dx=1$

$\boxed{\varepsilon>0:}$
$\omega_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^d}\,\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$; $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon=\overline{B_\varepsilon(0)}$, $\int_{\mathbb{R}^d}\omega_\varepsilon\,dx=1$

$\boxed{y\in\mathbb{R}^d:}$
$\omega_\varepsilon(x-y)=\frac{1}{\varepsilon^d}\,\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$; $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon(\cdot-y)=\overline{B_\varepsilon(y)}$, $\int_{\mathbb{R}^d}\omega_\varepsilon(x-y)\,dx=1$
$\omega_\varepsilon(x-y)=\omega_\varepsilon(y-x)$

Cvičení: Ukažte, že $T_{\omega_\varepsilon}\to\delta$ v $\mathcal{D}'$ pro $\varepsilon\to0$

$\boxed{\text{Zhlazování fcí}}$ fce $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ přiřadíme f_ε: $f_\varepsilon(x)=(f*\omega_\varepsilon)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\omega_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy$

Víme: $\omega_\varepsilon\in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\Rightarrow$ $f_\varepsilon\in L^p(\mathbb{R}^d)$ & $\|f_\varepsilon\|_p\le\|f\|_p$, $1\le p\le+\infty$
také $f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$\boxed{\text{Platí Věta 17.2.}}$
(i) $f\in L^p(\mathbb{R}^d)\Rightarrow f_\varepsilon\in L^p(\mathbb{R}^d)\cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$; $\|f_\varepsilon\|_p\le\|f\|_p$ & $\|f_\varepsilon-f\|_p\to0$
(ii) $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ otevř. $\Rightarrow$ $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustý v L^p
(iii) $f\in C(\Omega)$ a $\operatorname{supp} f\subset K$ komp. $\subset\Omega$ $\Rightarrow$ $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ v K.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Pro $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ platí: $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx=0$ $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. Pak $f=0$ s.v. v Ω.

Dk. Buď $\phi\in L^\infty(K)$, $K\subset\Omega$ kompakt. Pak $\phi\in L^1$ a $\exists\,\phi_\varepsilon\in\mathcal{D}(\Omega)$ tak, že $\phi_\varepsilon\to\phi$ v L_1. Pak $\exists$ vybraná posloupnost $\phi_{\varepsilon_k}\to\phi$ s.v. $(k\to\infty)$ a $\|\phi_\varepsilon\|_\infty\le\|\phi\|_\infty$. Tedy: $0=\int_\Omega f(x)\phi_\varepsilon(x)\,dx \Rightarrow$
$\Rightarrow 0=\int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx$ Vol $\phi(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|}\chi_K\in L^\infty$. Pak $0=\int_K|f(x)|\,dx$ $\Rightarrow f=0$ s.v. v K.

17.5 Nosič a řád distribuce. Struktura distribucí

- Pro funkce $f: \Omega \to \mathbb{R}^d$ je $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}$
- U distribucí, kde nelze mluvit o její hodnotě v x, je třeba definovat nosič opatrněji:
  - $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ obě otevřené $\Rightarrow$ $T_G : \mathcal{D}(G) \to \mathbb{R}^d$ definované předpisem $\langle T_G, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ je distribuce patřící do $\mathcal{D}'(G)$.

    (zúžení T na G)
  - Def $\underbrace{T \text{ vymizí na } G}$ $\equiv \langle T, \varphi \rangle = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$

    $\underbrace{T = S \text{ na } G}$ $\equiv \langle T - S, \varphi \rangle = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$

    Pokud T vymizí na každém G_α, kde $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je soubor otevřených množin, pak T vymizí na jejich sjednocení (lze nahlédnout pomocí tvrzení o rozdělení 1 aplikované na $\varphi \in \mathcal{D}\left(\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha\right)$). Odsud plyne existence největší (otevřené) množiny N_T takové, že T vymizí na N_T.

Def. Nosičem distribuce T nazveme doplněk N_T.

Př. $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ $\Rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ $\Rightarrow$ nosič δ je $\{0\}$.

Platí: $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, kde $\mathcal{E} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\}$

a s ohledem spojitých lineárních funkcionálů

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'.$$

Ukazuje se, že $\mathcal{E}'$ jsou distribuce s kompaktním nosičem

Připomeňme:

$$T \in \begin{cases} \mathcal{D}' \\ \mathcal{S}' \end{cases} \text{ lineární} \quad \overset{\text{def}}{\equiv} \langle T, \varphi_m \rangle \xrightarrow{n \to \infty} 0 \text{ pokud } \varphi_m \to 0 \text{ v } \begin{cases} \mathcal{D} & \exists K \text{ kpt.}: D^\alpha \varphi_m \rightrightarrows 0 \text{ v } K \ \forall \alpha \\ \mathcal{S} & |x^\alpha D^\beta \varphi_m(\cdot)| \rightrightarrows 0 \text{ v } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

$$|x^\alpha D^\beta \varphi_m(\cdot)| \rightrightarrows 0 \iff |(1+|x|)^N D^\beta \varphi(\cdot)| \rightrightarrows 0 \quad |\beta| = N$$

Def. Řád distribuce je nejmenší $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, že platí: $D^\alpha \varphi_m \rightrightarrows 0$ v K $\forall \alpha: |\alpha| \leq q \Rightarrow \langle T, \varphi_m \rangle \to 0$

- Regulární distribuce a δ-distribuce jsou nulového řádu
- v.p. $\frac{1}{x}$ je distribuce řádu 1.

Struktura distribucí Platí:

▷ Je-li Ω omezená, otevřená, pak $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ platí: T má konečný řád.

▷ Je-li $T \in \mathcal{E}'$ (distribuce s kompaktním nosičem), pak $\exists$ konečně spojitých funkcí f_α tak, že $\boxed{T = \underbrace{\sum D^\alpha f_\alpha}_{\text{konečný součet}}}$ a pro $\forall \alpha$ $D^\alpha f_\alpha$ má komp. nosič

▷ Je-li $T \in \mathcal{S}'$ (temperované distribuce), pak $\exists$ konečně spojitých funkcí f_α splňujících $|f_\alpha(x)| \le C_\alpha (1+|x|)^N$ pro jisté N a $\boxed{T = \underbrace{\sum D^\alpha f_\alpha}_{\text{konečný součet}}}$

▷ Je-li $T \in \mathcal{D}'$ (distribuce), pak $\exists$ spojité funkce f_α tak, že $\boxed{T = \underbrace{\sum D^\alpha f_\alpha}_{\text{nekonečný součet}}}$

přičemž pro $\forall\, \Omega$ omezenou, otevřenou je jen konečný počet sčítanců nenulový.

Příklad Buď $T = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(n)} (-1)^n$ tzn. $\boxed{\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)}$

Víme, že $H' = \delta$ a také, že $(x^+)' = H(x)$ tedy

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(x-n)^+\right]^{(n+2)} \Big|_{x=n}$$

17.6 Součin distribucí, tenzorový součin distribucí a konvoluce distribucí

Příklad Ukažte, že $\boxed{x\delta = 0 \text{ v } \mathcal{D}'}$, a $\boxed{x T_{v.p.\frac{1}{x}} = 1 \text{ v } \mathcal{D}'}$.

Řešení ① $\langle x\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = (x\varphi)(0) = 0$

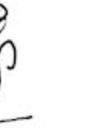
② $\langle x T_{v.p.\frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \langle T_{v.p.\frac{1}{x}}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \langle 1, \varphi \rangle$

Věta 17.3 (Schwartzova)

Na $\mathcal{D}'$ nelze zavést násobení (distribucí) tak, aby bylo komutativní, asociativní a platilo $x\delta = 0$ v $\mathcal{D}'$, a $x T_{v.p.\frac{1}{x}} = 1$ v $\mathcal{D}'$

Dk Kdyby ano, pak

$$0 = 0\, T_{v.p.\frac{1}{x}} = (x\delta)\, T_{v.p.\frac{1}{x}} = \delta\left(x T_{v.p.\frac{1}{x}}\right) = \delta 1 = \delta, \text{ což dává } ↯$$



Pro $f, g \in L^1$ platí: $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$. Díky Větě 17.3. nelze očekávat, že by vztah $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$ platil pro distribuce bez omezení!

$\boxed{\text{Tenzorový součin fcí a distribucí}}$

▷ $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, pak $(f \otimes g)(\underset{\in \mathbb{R}^d}{x}, \underset{\in \mathbb{R}^p}{y}) = f(x) g(y) : \mathbb{R}^{d\times p} \to \mathbb{R}$

$f, g \in L^1 \Rightarrow f \otimes g \in L^1$ (Fubini)

▷ Rozšíření pro distribuce

$$\langle T_{f\otimes g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{d+p}} (f\otimes g)(x,y)\varphi(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^p} g(y)\varphi(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \langle T_f, \langle T_g, \varphi(x,\cdot) \rangle \rangle$$

Tedy: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p) \Rightarrow \langle T \otimes S, \varphi \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \langle T, \langle S, \varphi(x,\cdot) \rangle \rangle$

$\boxed{\text{Příklad}}$ Buď $T = \underset{\uparrow \text{čas}}{\delta} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a $S = \underset{\uparrow \text{prostor}}{\delta} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Pak $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$: $\langle T \otimes S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(t,0) \rangle = \varphi(0,0) = \langle \underset{\uparrow \text{časoprostor}}{\delta}, \varphi \rangle$

tedy $T \otimes S = \delta_{\text{v časoprostoru}} = \delta(t) \otimes \delta(x) = \delta(t)\delta(x)$

POZOR! NEJDE O SOUČIN DVOU DISTRIBUCÍ ZE STEJNÉHO PROSTORU

$\boxed{\text{Konvoluce temperovaných distribucí}}$ vyžadují opatrnost.

víme: $f, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^1$, $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\, dy$.

Počítejme $\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(\underbrace{x-y}_{z}) g(y)\, dy\, \varphi(x)\, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(y) \varphi(z+y)\, dz\, dy$$

$$= \langle f \otimes g, \varphi_* \rangle \quad \text{kde } \varphi_*(x,y) = \varphi(x+y)$$

Problém: i když $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, tak $\varphi_* \notin_{\text{obecně}} \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$

$\boxed{\text{Obecná konstrukce/definice}}$

Buď $\boxed{\eta_R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})}$, $\eta_R \equiv 1$ pro $|x| \le R$, $|D^\alpha \eta_R| \le M_\alpha$ v $\mathbb{R}^{2d}$. $\boxed{T, S \in \mathcal{D}'}$

Nechť existuje $\lim_{R\to\infty} \langle T \otimes S, \eta_R \varphi_* \rangle = c_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Pak funkcionál U def. $\langle U, \varphi \rangle = c_\varphi$ — " — nazveme konvolucí T a S, značíme $\underline{U = T * S}$.

Tato komplikovaná konstrukce lze zjednodušit v některých speciálních případech.

$\boxed{\text{Věta 17.4}}$ (O existenci konvoluce distribucí, důkaz Čeněk, Pošta)
Buď $T, S \in \mathcal{D}'$ nebo $\mathcal{S}'$ a S má kompaktní nosič. Pak $T * S \in \mathcal{D}'$ a platí $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \eta \varphi_* \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\eta = 1$ na supp S.

(Př.) Buď $T, \delta \in \mathcal{D}'$:

$$\langle \delta * T, \varphi \rangle = \langle \delta \otimes T, \eta\varphi_* \rangle = \langle T \otimes \delta, \eta\varphi_* \rangle = \langle T, \langle \delta, \eta\varphi_* \rangle \rangle$$

$$= \langle T, \langle \delta, \varphi_* \rangle \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Existují jiné, ale stále instruktivní postupy jak zavést konvoluci distribuce $T \in \mathcal{D}'$ nebo $\mathcal{S}'$ a hladké funkce $\varphi \in \mathcal{D}$ nebo $\mathcal{S}$.

$\boxed{\mathrm{I}}$ $\boxed{\text{Buď } \psi \in \mathcal{S} \text{ a } T \in \mathcal{S}'}$ Hledejme nejdříve adjungovanou (duální) identitu: pro $\psi, T \in \mathcal{S}$

$$\langle \psi * T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (\psi * T)(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y)T(y)\varphi(x)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} T(y) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y)\varphi(x)\,dx \qquad \tilde{\psi}(z) := \psi(-z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} T(y) \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\psi}(y-x)\varphi(x)\,dx$$

$$= \langle T, \tilde{\psi} * \varphi \rangle \qquad \tilde{\psi} * \varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \text{pravá strana má smysl pro } T \in \mathcal{S}'$$

Lze tedy přidat do naší sady identit:

$\boxed{\text{Def \#2}}$ $\boxed{T \in \mathcal{S}'}$ $\boxed{\langle \psi * T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\psi} * \varphi \rangle \quad \text{kde } \tilde{\psi}(z) = \psi(-z),\ \psi \in \mathcal{S}}$

Dokažme, že platí: Je-li $\psi \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{S}'$, pak $\widehat{\psi * T} = \hat{\psi}\hat{T}$

Dk

$$\langle \widehat{[\psi * T]}, \varphi \rangle \underset{(5)}{=} \langle \psi * T, \hat{\varphi} \rangle \underset{(6)}{=} \langle T, \tilde{\psi} * \hat{\varphi} \rangle$$

$\boxed{\text{Na } \mathcal{S} \text{ platí inverzní Fourierův vzoreček}}$

$$= \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]] \rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}]\,\underbrace{\mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}]}_{\varphi} \rangle = (*)$$

Spočítejme
$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}](x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\psi}(s) e^{+2\pi i x\cdot s}\,ds = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-s) e^{+2\pi i x\cdot s}\,ds \underset{s'=-s}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(s') e^{-2\pi i x\cdot s'}\,ds = \hat{\psi}(x)$$

$$(*) = \langle \hat{T}, \hat{\psi}\varphi \rangle \overset{(4)}{=} \langle \hat{\psi}\hat{T}, \varphi \rangle$$

$\boxed{\mathrm{II}}$ $\boxed{\text{Buď } \psi \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{S}'}$ Konvoluci lze zavést jiným přímočařejším způsobem. Je-li totiž $T \in \mathcal{S}$ pak

$$(\psi * T)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y)T(y)\,dy = \langle T, \tau_{-x}\tilde{\psi} \rangle \quad \text{kde } (\tau_{-x}\tilde{\psi})(y) = \tilde{\psi}(y-x) = \psi(x-y)$$

Navíc však výraz vpravo má smysl i pro $T \in \mathcal{S}'$

Tedy

$\boxed{\text{Def \#3}}$ $\psi \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{S}'$: $\psi * T = \langle T, \tau_{-x}\tilde{\psi} \rangle$

(*) Navíc, zobrazení
$x \longmapsto (\psi * T)(x)$ tzn. zobrazení $x \longmapsto \langle T, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle \in C^\infty$
a tedy konvoluce distribuce s C^∞-fcí dává C^∞-fci.
(regularizující vlastnost distribuce)

Pro $\psi \in \mathcal{S}$ a $T \in \mathcal{S}'$ máme dvě definice konvoluce. Ukažme, že se shodují:

$$\langle \psi * T, \varphi\rangle \underset{\text{def } 3}{=} \int (\psi * T)(x)\varphi(x)\,dx$$

dle (*) je $\psi * T \in C^\infty$

$$= \int \langle T, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle \varphi(x)\,dx$$

$$= \left\langle T, \int (\tau_{-x}\tilde{\psi})\varphi(x)\,dx\right\rangle$$

$$= \left\langle T, \int \underbrace{\psi(x-y)}_{=\tilde{\psi}(y-x)}\varphi(x)\,dx\right\rangle$$

$$= \langle T, \tilde{\psi} * \varphi\rangle \underset{\text{Def } 2}{=} \langle \psi * T, \varphi\rangle$$

∎

17.7 Distribuce a Fourierovy řady

Tvrzení Nechť $|a_k| \le A|k|^q + B$, kde $A, B \ge 0$, $q \ge 0$, $k \in \mathbb{Z}$, pak řada $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x}$ konverguje v $\mathcal{S}'$ (B)

Dk Uvažujme řadu $\sum_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} \frac{a_k}{(2\pi i k)^{q+2}} e^{2\pi i k x} =: \check{R}(x)$

Pak $|\check{R}(x)| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} \frac{|a_k|}{2\pi\, |k|^{q+2}} \le C\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|k|^2} < \infty$

a tedy $|\langle \check{R}(x), \varphi(x)\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} \check{R}(x)\varphi(x)\right| \le \tilde{C}\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| < +\infty$.

▶ Naše řada vznikne $(q+2)\times$ zderivováním řady $\check{R}$, je tedy distribucí v $\mathcal{S}'$. ∎

Speciálně:

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i k x} \text{ konverguje v } \mathcal{S}'}$$

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i k x} \text{ konverguje v } \mathcal{S}'}$$

$\boxed{\text{Poissonův sčítací vzorec}}$ Víme, že $\mathcal{F}[\delta]=1$. Pomocí translačního vztahu nebo z definice také platí

$$\mathcal{F}[\delta_y](s) = e^{-2\pi i y\cdot s}$$

$\boxed{\text{Nechť pro jednoduchost nejdříve } d=1}$ Uvažme předchozí vztah pro $y=k$, $k\in\mathbb{Z}$ a provedeme součet přes k:

$$\mathcal{F}\Big[\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k}\Big](s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i ks}$$

tento součet definuje legitimní temperovanou distribuci představující nekonečný "hřeben" rovnoměrně umístěných hmotných bodů.

Řada vpravo vypadá komplikovaně, ale uvidíme, že tomu tak není. Naopak dostaneme stejnou sumu jako vlevo, tedy:

$$\text{(P)} \qquad \underline{\mathcal{F}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k\Big] = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k \quad \text{v } \mathcal{S}'} \qquad \boxed{\text{Poissonův sumační vzorec}}$$

Odvození: Součet $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i ks}$ neexistuje v klasickém smyslu.
K odvození využijeme metodu periodizace: pro $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ nebo $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definujme

$$(☆) \qquad Pf(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x-k)$$

Pak Pf je 1-periodická fce. Klíčová otázka, která vede k vzorci (P), je: jaký je vztah mezi $\boxed{\text{koeficienty } c_k \text{ Fourierovy řady fce } Pf}$ a $\boxed{\text{Fourierovou transformací } f}$?

Víme (viz vzorce na začátku kapitoly 16), že

$$c_k = \sqrt{2\pi}\int_0^1 Pf(x)\, e^{-2\pi i kx}\,dx \qquad \text{a} \qquad Pf(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{2\pi i kx}}{\sqrt{2\pi}}$$

Dosazením (☆):

$$c_k = \sqrt{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 f(x-j)\, e^{-2\pi i kx}\,dx$$

substituce $y=x-j$

$$= \sqrt{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{-j}^{-(j-1)} f(y)\, e^{-2\pi i ky}\,dy \qquad e^{+2\pi i kj} = 1, \quad k,j\in\mathbb{Z}$$

$$= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2\pi i ky}\,dy = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(k).$$

Tedy $Pf(x)$ je dána jednak součtem (☆) a také $\underline{Pf(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\, e^{2\pi i kx}}$

Dosazením $x=0$ do obou řad dostaneme

$$\boxed{(*) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)}$$

což lze zapsat takto

pravidlo pro práci F.T. na $\mathcal{S}'$

$$\left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k, \hat{f} \right\rangle = \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k, \hat{f} \right\rangle = \left\langle \widehat{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k}, f \right\rangle,$$

pokud $f\in\mathcal{S}$ (málo z $\mathcal{D}$)

což dává slibovaný Poissonův vzorec P.

$\boxed{\text{Pro } d>1}$ lze postupovat velmi podobně a získat vztahy pro periodické mřížky (svazy lattice)

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(k)} \quad \text{a} \quad \boxed{\widehat{\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_k}$$

$k\in\mathbb{Z}^d$ – d-tice celých čísel

tento vztah bohužel neplatí univerzálně (pro $f\in\mathcal{S}$ a $\mathcal{D}$ o.k.)

! Existují funkce, kdy obě řady konvergují absolutně, ale k jinému číslu.

Aplikace
- teorie čísel
- krystalografie (kvazi periodické mřížky) [δ_k atom v k, $\hat{f}$ výstup zář.]
- pozoruhodné vztahy, pokud $\hat{f}$ lze explicitně spočíst např.

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 t k^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{e^{-4\pi^2 t x^2}}(k) \underset{\mu=4\pi^2 t}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2}{4t}}}$$