

Laurentovy řady

Pierre Alphonse Laurent



Born	18 July 1813 Paris, France
Died	2 September 1854 (aged 41) Paris, France
Alma mater	École Polytechnique
Scientific career	
Fields	Mathematics

Definice Laurentova řada v $a \in \mathbb{C}$ je řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, kde $17/21$

$\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$. Tato řada konverguje podle věty

• $s^+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje

a dokonce

• $s^-(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$ konverguje

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ je matějová regulární část Laurentovy řady (neboť je-li $f \in H(B_R(a))$ tak je její Laurentova řada je právě tato řada dle věty 15.8)

Řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ je matějová hlavní část Laurentovy řady (uvědomte charakter funkce v okolí bodu a , kterou tato řada popisuje)

Věta 15.9 Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ existují $0 < r < R < +\infty$

tak, že

- regulární část $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $B_R(a)$
- hlavní část $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(a)}$

Je-li $0 < r < R$, pak Laurentova řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $U_{r,R}(a) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ a její součet $s(z) = s^+(z) + s^-(z)$ je holomorfní v $U_{r,R}(a)$ MEZIKLUŽÍ

Věta 15.10 Pokud $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $f \in H(U_{r,R}(a))$.

Pak existují jedinečné koeficienty $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ tak, že

(•) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ v $U_{r,R}(a)$

přičemž

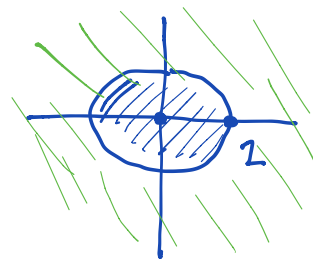
(••) $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ kde $r \in (r, R)$

Jak Laurentovy řady počítat / nacházet?

- z (••) ve větě 15.10
- jinak -- součet geometrické řady, příp. jiných řad

(Pr) $f(z) = \frac{1}{z-2} \quad z \in \mathbb{C}$

- $\frac{1}{z-2}$ už je ve tvaru L.ř. v bodě $a=2$... tato L.ř. má pouze 1 člen,
 $(z-2)^{-1} \Leftrightarrow \mu = -1$
 $f(z)$ má pól nás. 1 v $z=2$



- Holuje L.ř. v $a=0$

$f(z) \in H(U_2(0))$, kde $\frac{|z|}{2} < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{z}{2}}}_{\text{Souč.-g.ř.}} = -\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n}_{\text{L.ř., dle Taylorova ř. / McLaurinova ř.}} \quad \text{pro } |z| < 2$$

L.ř., dle Taylorova ř. / McLaurinova ř.

$f(z) \in H(U_{2,0}(0))$, kde $\frac{2}{|z|} < 1$

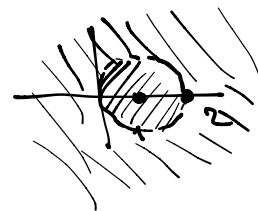
$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{z}{2}}}_{\text{Souč.-g.ř.}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^{n+1}} = \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} \frac{z^{\tilde{n}-1}}{z^{\tilde{n}}}$$

$$= \sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} z^{n-1} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n-1} z^n \quad \left(\sum c_n (z-a)^n \right)$$

L.ř. pouze kladný část
 regulární část = 0

Terminologie: Laurentova řada se střídá v $a=\infty$

- L.ř. $f(z) = \frac{1}{z-2}$ v $a=1$



$$f(z) = \frac{1}{(z-1)-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \quad \text{pro } |z-1| < 1$$

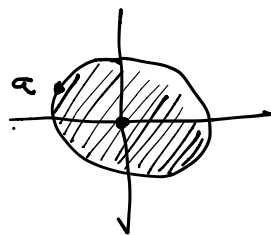
(Př) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = 0$

$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = \dots$ (na přehledě!)

$\uparrow$ $\uparrow \checkmark$
 jednoduché jednoduché

(Př) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$, kde $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$

L.ř. v bodě (a) $z_0 = 0$ (b) $z_0 = \infty$



(a) $f(z) = H(u_a(z))$, kde $|z| < |a| \Leftrightarrow \left|\frac{z}{a}\right| < 1$

• $\underline{k=1}$ $\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$

$\left|\frac{z}{a}\right| < 1$

Podle věty 15.10 (2) můžeme k abs. a lok. stej. $\rightarrow$ můžeme derivovat člen po člen

$\left\{ \frac{d}{dz} \right\} \frac{-1 \cdot 1}{(z-a)^2} = -\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{a^n} = -\frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z}{a}\right)^{n-1} \leftarrow k=2$

$\left\{ \frac{d}{dz} \right\} \frac{(-1 \cdot 1) \cdot 2}{(z-a)^3} = -\frac{1}{a^3} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left(\frac{z}{a}\right)^{n-2} \leftarrow k=3$

$\left\{ \frac{d}{dz} \right\} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(z-a)^k} = -\frac{1}{a^k} \sum_{n=k-1}^{\infty} \overbrace{n(n-1)\dots(n-k+2)}^{\frac{n!}{(n-k+1)!}} \left(\frac{z}{a}\right)^{n-k+1}$

Upravíme:

$\frac{1}{(z-a)^k} = \frac{(-1)^k}{a^k} \sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k+1)! (k-1)!} \left(\frac{z}{a}\right)^{n-k+1}$

$$\tilde{m} = m - k + 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{(z-a)^k} = \frac{(-1)^k}{a^k} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(\tilde{m}+k-1)!}{\tilde{m}! (k-1)!}}_{\text{binomial coefficient}} \left(\frac{z}{a}\right)^{\tilde{m}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{(z-a)^k} = \frac{(-1)^k}{a^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{z}{a}\right)^n \leftarrow \text{L.R. (Taylor, McLaurin)}$$

$$(g) z_0 = \infty \Leftrightarrow f(z) \in H(U_{a,\infty}(0)), \text{ with } \left|\frac{a}{z}\right| < 1$$

Steyn' poskop $f(z) \in H(U_{a,\infty}(0))$

$$\frac{1}{(z-a)^k} = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

$$(Pf) f = \frac{1}{(z^2+1)^2} \quad (a) z_0 = i \quad (b) z_0 = \infty$$

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \left[\frac{1}{(z+i)(z-i)} \right]^2 = \left[\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) \frac{1}{2i} \right]^2$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{(z-i)^2} - \frac{2}{(z-i)(z+i)} + \frac{1}{(z+i)^2} \right] = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{(z-i)^2} - \frac{1}{i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) + \frac{1}{(z+i)^2} \right]$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{(z-i)^2} + \frac{i}{(z-i)} - \frac{i}{z+i} + \frac{1}{(z+i)^2} \right]$$

$\uparrow \checkmark$ $\uparrow \checkmark$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $m=-2$ $m=-1$ $\text{vkl\u00e4rung}$ derivative

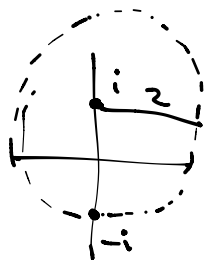
$$(a) z_0 = i$$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i} \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$$

$\downarrow \frac{d}{dz}$ $|z-i| < 2$ $\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^{n-1}}{(2i)^n} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) \frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+1}}$$

$n-1 = \tilde{m} \rightarrow m$



→ Collect

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{4} \underbrace{\left[(z-1)^{-2} + i(z-1)^{-1} \right]}_{\text{hl. část}} - \underbrace{\frac{i}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i} \right)^n - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) \frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+1}}}_{\text{reg. část}}$$

$$= \dots = \sum_{n=-2}^{\infty} i^n (n+3) \frac{(z-i)^n}{2^{n+4}} \quad 0 < |z-i| < 2$$

(2) $z_0 = \infty$ D. cv.

(Pr) $f(z) = \sin z$, L. ř. v. $z_0 = 0$

$$\text{Víme: } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \leftarrow \text{Laur. řada } \sin z \text{ v } z_0 = 0$$

(Pr) $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$ L. ř. v. $z_0 = 1$ $f(z) \in H(\mathbb{C} \setminus \{1\})$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} \sim \text{L. ř. } \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \text{ v } z_0 = 1$$

$$\bullet \quad z^2 = [(z-1) + 1]^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1 \quad \text{L. ř. } z^2 \text{ v } z_0 = 1$$

$$f(z) = [(z-1)^2 + 2(z-1) + 1] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (z-1)^{-(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{-2n+1}}{(2n+1)!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{-2n}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{-2n-1}}{(2n+1)!}$$

$$= (z-1) + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{(z-1)^{2n-1}} \left[\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n-1)!} \right] + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} \right\}$$