

► Rěšení Cauchyho úlohy pro obecnou nehomogenní parabolickou rovnici vedení tepla

Uvažujme lineární evoluční PDR $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ v celém prostoru $\mathbb{R}^d$.
Cílem je nalézt řešení tzv. Cauchyho úlohy, tedy hledat řešení rovnice v celém prostoru $\mathbb{R}^d$ s danou počáteční podmínkou v čase $t=0$. Tedy

Cauchyho úloha pro rovnici vedení tepla

nalézt $u: (0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$(T) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{v } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{v } \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

kde $f: (0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ a $u_0: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ jsou data problému, když daní libovolně.

Úloha (T) je lineární (Proč?) a lze ji přislat k rovnici bilance energie v termodynamice kontinua:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v \cdot \nabla e = \Pi \cdot \left(\frac{\nabla v + (\nabla v)^T}{2} \right) - \operatorname{div} \vec{q} + r$$

Na předpokladech, že těleso je v klidu a že rychlost $\vec{v} = 0$ a vnitřní energie e je úměrná teplotě u (tj. $e = c_v u$, kde c_v je měrné teplo při konstantním objemu) a teplotní tok $\vec{q}$ je nepřímo úměrný gradientu teploty (tj. $\vec{q} = -k \nabla u$, kde $k > 0$ je koeficient tepelné vodivosti)

Pak
$$c_v \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = r,$$

kde r je daný objemový zdroj (radiace). [Symbol Π uvedený výše představuje tenzor napětí.]

Předpokládáme, že pro $\forall \sigma > 0$ je $f(\sigma, \cdot) \in \mathcal{G}$ a také $u_0 \in \mathcal{G}$. Hledáme řešení splňující (T) tak, aby $u(t, \cdot) \in \mathcal{G}$ pro $t > 0$.

Rěšení budeme hledat tak, že na rovnici vedení tepla aplikujeme Four. transformaci, tj. násobíme rovnici $e^{-2\pi i x \cdot s}$ integrujeme přes $\mathbb{R}^d$ vzhledem k x . Důležité: (čas t je nyní pro nás parametr.)

Pro (*) píšeme do tvaru

$$(*)_{\text{mod}} \quad \hat{u}(t,s) = \hat{u}_0(s) \hat{G}_t(x)(s) + \int_0^t \hat{f}_\tau(s) \hat{G}_{t-\tau}(s) d\tau$$

z věty 1.2 (ii), pro (*) mod píšeme do tvaru

$$\hat{u}(t,s) = u_0 * G_t(s) + \int_0^t f(\tau, \cdot) * G_{t-\tau}(\cdot)(s) d\tau$$

Aplikací Inverzní Fourier transformace nabýváme

$$(\mathbb{R}) \quad \boxed{u(t,x) = (u_0 * G_t)(x) + \int_0^t (f(\tau, \cdot) * G_{t-\tau})(x) d\tau}$$

což je hledaná řešení pro libovolné u_0 a f .

Dosadíme-li explicitní vzoreček pro G_t , dostaneme

$$\boxed{u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{d/2}} dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(\tau,y) \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{(4\pi(t-\tau))^{d/2}} dy d\tau}$$



Gaussian G_t se také nazývá Fundamentální r.š. rovnice uvolněná tepla. Má určité význačné vlastnosti (viz následující) Lemma a r.š. $\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \rightarrow u(0, \cdot) = \delta_0 \right]$ jež vidíme potvrdit. Diracova distribuce v poč.

Lemma (Důležité vlastnosti Gaussianu G_t)

$$(1) \quad \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[G_t]] = G_t$$

$$(2) \quad G_t \geq 0$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x) dx = 1$$

(rozdělení 1)

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} G_t(x) = 0 \text{ if } x \neq 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{konvergence je stejnoměrná} \\ \text{na } |x| \geq \varepsilon \text{ pro } \forall \varepsilon > 0 \end{array} \right)$$

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} G_t * u_0 = u_0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{NABÝVÁNÍ POČ. PODMÍNEK} \\ \text{ŘEŠENÍM (R*)} \end{array} \right)$$

(Dě) (1) - (4) si provede sám pomocí Pr. 3, školování.

[Ad (5)] Platí

$$(G_t * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy = \frac{1}{(\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} u_0(x + \sqrt{t}z) dz$$

Záměnou $\lim_{t \rightarrow 0}$ a $\int_{\mathbb{R}^d}$, pomocí Lebesgueovy věty, dostáváme tvrzení. □

Věta 16.4 (Schwartzova - Laurent Schwartz - Francouzský mat. 20. století)

$\mathcal{F}: \mathcal{S} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{S}$ a $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{S}$ a platí $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2 = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_2$

De Tvrzení dále platí, že overline plocha Fourierova uměního vztahuje.

Dělat uelre prověřit přímo:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(s) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i s \cdot y} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i (x-s) \cdot y} dx dy = f(s) \quad \int_{\mathbb{R}^d} dy = +\infty.$$

všechny x, y nemějí jin pro $x=s$

Využijeme vsk vektorů G_t .
 Bud $f \in \mathcal{S}$ libovolné. Definujeme $H_t(x) := (G_t * f)(x)$.
 Pak $\hat{H}_t(s) = \hat{G}_t(s) \hat{f}(s)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\hat{H}_t(s)](x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot s} \hat{H}_t(s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot s} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot s} \hat{G}_t(s) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \cdot s} dy \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}_t(s) e^{2\pi i s \cdot (x-y)} ds dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}_t(s) e^{2\pi i s \cdot (x-y)} ds}_{\mathcal{F}^{-1}[\hat{G}_t]}(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) G_t(x-y) dy \stackrel{\text{Lemma (1)}}{=} (f * G_t)(x) \end{aligned}$$

z něj o rovnosti

$$\|f * G_t\|_1 \leq \|f\|_1 \|G_t\|_1.$$

Tedy $\lim_{t \rightarrow 0} f * G_t = f$

Nalevo vsk máme $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1}(\hat{H}_t(s))(x)$, což vede z

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1}(\hat{H}_t(s))(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1}(\hat{G}_t(s) \hat{f}(s))(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s) \right)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(s))(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f)](x) = f(x) \end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow 0} f * G_t(s)$

Zbyvá dovést platnost Parsevalovyho rovnosti. Bud' $f, g \in \mathcal{S}$,
 pak dle definice

$$\begin{aligned} \underline{(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R}^d)}} &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) \overline{\hat{g}(s)} ds = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) \overline{\int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)} e^{2\pi i x \cdot s} dx ds \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) \overline{g(x)} e^{2\pi i x \cdot s} dx ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) e^{2\pi i x \cdot s} ds \right) \overline{g(x)} dx$$

$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)$, což se dle dočítaného
 Fourierovy transformace rovná $f(x)$
 invariance

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$= \underline{(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$$

$$\text{Tedy } \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad (\star)$$

$$\text{Nechť } g \in \mathcal{S} \text{ a } \check{g} =: h, \text{ kde } \hat{h} = g \text{ a dle } (\star)$$

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\check{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

vi
 hidelov
 Brana

$$\text{Ověříme, že výše, že } \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1}(\hat{G}_t(s) \hat{f}(s)) = \mathcal{F}^{-1}(\lim_{t \rightarrow 0} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s)).$$

Naše věta

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{G}_t(s) \hat{f}(s))^{(y)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i|y|^2 t} \hat{f}(y) e^{2\pi i y \cdot s} dy =: I$$

$$\text{a } |I| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(y)| dy < \infty \quad \text{neboť } f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S} \text{ dle věty 1.3 (b).}$$

$$\text{a } \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$$

Tedy dle Lebesgueovy věty můžeme zaměnit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{ a } \mathcal{F}^{-1}.$$

Důležitá věta 16.4 je ukázaná. $\square$

Poslední část první kapitoly věnujeme potvrdění Fourierovy transformace z $\mathcal{S}$ na L^2 . Ukážeme, bude Parsevalova rovnost dostávána ve větě 1.5, která platí pro funkce z $\mathcal{S}$ a hustota $\mathcal{S}$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$.

ÚMLUVA : v následující části

zadáme $\hat{f}$ značí Fourierov transform. pro $f \in \mathcal{S}$
 $\mathcal{F}[f] \mapsto \text{---} \mapsto \text{---}$ pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Tu teď budeme konstruovat. Potom,

$\mathcal{F}[f]$ pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ NEJ dána integrálem
 $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix \cdot s} dx$

Konstrukce [křížkový matematický postup.]

- ① Protože $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ jsou husté v $L^2(\mathbb{R}^d)$ a
 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, tak
 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ jsou husté v $L^2(\mathbb{R}^d)$

Pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tak $\exists \{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ tak, u
 $f_n \rightarrow f$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$ tm. $\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0$

Je-li $\{f_n\}$ konvergentní, je Cauchyovská. Tedy ($\forall \varepsilon > 0$)
od jistého n_0 $\|f_n - f_m\|_{L^2} < \varepsilon$ pro všechna $n, m \geq n_0$

- ② Aplikujeme-li Parsevalovu rovnost A věz 1.5
na $f_n - f_m \in \mathcal{S}$ dostáváme

$$\|f_n - f_m\|_{L^2} = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2} = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2}$$

Z Cauchyovskosti $\{f_n\}$ a A křelo identity plyne,
že $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^\infty$ jsou Cauchyovské.

Mají tedy limity (nebo L^2 je úplný) a tyto
limity jsou hledané Fourierovy transformace:

$$\mathcal{F}[f] \stackrel{\text{def}}{=} \lim \{\hat{f}_n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{F}^{-1}[f] \stackrel{\text{def}}{=} \lim \{\hat{f}_n\}$$

Věta 16.6 (Vlastnosti Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^d)$)

- (1) Je-li $f \in L^2$, pak $\mathcal{F}[f]$ existuje na volbě $\{f_n\}_{n=1}^\infty$
- (2) $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou invertivní, tzn. $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ pro $\forall f \in L^2$
- (3) Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, pak $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$ s.v. v $\mathbb{R}^d$
- (4) Je-li $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a $\hat{f}_n(s) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx$,
 $\mathcal{B}_n(0) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

pak $\mathcal{F}[f](s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(s)$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$

[toto je úvod, jak pochopit Four. transformaci pro $f \in L^2$].

- (5) $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ je izometrie: $\|\mathcal{F}[f]\|_2 = \|f\|_2$.

Dě **Ad (1)** Uvažujme dvě různé posloupnosti $\{f_n^1\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ a $\{f_n^2\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ konvergující k $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Pak však $f_n^1 - f_n^2 \rightarrow 0$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$.
 Dle níže, uvažujme $h \in \mathcal{S}$ splňující:

$$\|h\|_2 = \|\hat{h}\|_2 = \|h\|_2 \quad \text{a} \quad (\hat{h})^\vee = h.$$

(dle Schwarzovy věty).

Tedy $\|f_n^1 - f_n^2\|_2 = \|\hat{f}_n^1 - \hat{f}_n^2\|_2 = \|\hat{f}_n^1 - \hat{f}_n^2\|_2$.

Protože máme dvě konvergující řady, tak vidíme, že $\hat{f}_n^1$ a $\hat{f}_n^2$ (a $\hat{f}_n^1$ a $\hat{f}_n^2$) dávají stejnou limitu a to $\mathcal{F}[f]$ (resp. $\mathcal{F}^{-1}[f]$).

Ad (2) Bud $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ takové, že $f_n \rightarrow f$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pak $\hat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}[f]$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Víme, že $g_n := \hat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}[f] =: g$ v L^2 a $\{g_n\} \subset \mathcal{S}$

Tedy $\tilde{g}_n \rightarrow \mathcal{F}^{-1}[g]$. Avšak tzn. $f_n \rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$ v L^2 .

Protože $f_n \rightarrow f$ v L^2 tak musí platit $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$.

Ad (3) Je-li $f \in L^1 \cap L^2$, pak $\exists \{f_n\} \subset \mathcal{S}$ tak, že $f_n \rightarrow f$ v L^1 a $f_n \rightarrow f$ v L^2

a $\hat{f}_n(s) = \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx$ (*)

Protože $f_n \rightarrow f$ v L^1 , tak $\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx$

[Schlechte] $\left| \int_{\mathbb{R}^d} (f_n - f)(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_n - f|(x) dx \leq \|f_n - f\|_1$

Problém $f \mapsto \hat{f} \in L^2$, tak $\hat{\hat{f}} \rightarrow \mathcal{F}[f] \in L^2$
 a dle Rieszovy věty existuje vybraný podprostor $\hat{f} \mapsto \mathcal{F}[f]$
 tak, že $\hat{\hat{f}} \rightarrow \mathcal{F}[f]$ s.v. v $\mathbb{R}^d$.

Tvrzení: Plyní A lineárního přechodu v (3) aplikovaného
 na f^m .

Ad (5) Isometrie Fourierovy transformace plyní z
 Parsevalovy / Plancherovy rovnice
 z 3 na L^2 , viz bod (2).

Ad (4) Bude $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a omezení $f_m := f \chi_{B(0,m)}$.

Pak stejně $f_m \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a $f_m \rightarrow f$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$,
 což znamená, že $\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_m|^2 \rightarrow 0$ pro $m \rightarrow \infty$.

Dále $\mathcal{F}[f_m] = \hat{f}_m$ s.v. a $\mathcal{F}[f_m] \rightarrow \mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbb{R}^d)$
 dle (3) díky Parsevalově rovnici
 pro funkci v $L^2(\mathbb{R}^d)$.

DODATEK Vlastnosti $\hat{f}$ na $L^1(\mathbb{R}^d)$



Platí následující tvrzení, která nebudeme dokazovat.

Tvrzení 1 Bude $f \in L^1(\mathbb{R})$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že

(i) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x) = f(x_0 \pm)$

(ii) $\exists \delta > 0 \exists M \quad |f(x) - f(x_0 +)| \leq M|x - x_0| \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
 $|f(x) - f(x_0 -)| \leq M|x - x_0| \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

Potom $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 +) + f(x_0 -)]$

Tvrzení 2 Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = f$.

Důsledek Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[f] = 0$ s.v. $\Rightarrow f = 0$ s.v.

a
 $\mathcal{F}: L^1 \rightarrow$ "prostor funkcí s $\mathcal{F}[f] \in L^1$ " je jisté zobrazení.

Důkaz Fúrtzéní 2 provedeme pomocí Lemmatu

Lemma Necht $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ splňuje $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx = 0$
 $\text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Pak $f = 0$ s.v. v $\mathbb{R}^d$.

—
 Necht $f, \mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Protož $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tak
 $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) \varphi(x) dx < \infty$
 $\text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Namc:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f](y) e^{2\pi i y \cdot x} \varphi(x) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f](y) \mathcal{F}^{-1}[\varphi](y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} \mathcal{F}^{-1}[\varphi](y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]](x) dx \end{aligned}$$

Aniž $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a když $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a pro tak φ
 platí inverzní Fourierův vztah, tj.:

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]](x) = \varphi(x).$$

Tedy $\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) - f(x)) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$

což dle Lemmy dává tuzeš.

□