15.4. MOCNINNÉ (TAYLOROVY, McLAURINOVY) ŘADY, LAURENTOVY ŘADY (A FOURIEROVY) ŘADY A KLASIFIKACE SINGULARIT.

Věta 15.8 Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, $a \in \Omega$, $B_R(a) \subset \Omega$ a $f \in H(\Omega)$.
Pak existují jednoznačně určené $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$ tak, že

(*) $$\boxed{f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad \text{pro } z \in B_R(a)}$$

(**) přičemž $$c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(a)} \frac{f(z)}{(z-w)^{m+1}}\, dz \qquad \varrho \in (0,R)$$

Terminologie: Řada (*) je mocninná řada, protože však $c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$, což je důsledkem (**) a Cauchyho integrálního vzorečku (a také důkazu Věty 15.8), je řada (*) Taylorova řada (které se pro $a=0$ nazývá Mclaurinova řada).

Dk ▸ Jednoznačnost koeficientů c_m jsme si dokázali již v teorii mocninných řad, viz Věta 6.19: kdyby byly dvě řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_m (z-a)^m$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_m (z-a)^m$ tak po dosazení $z=a$ máme $c_0 = \tilde{c}_0$. Dále dvě řady zderivujeme, atd ...

▸ Existenci získáme pomocí vzorečku pro součet geometrické řady a Cauchyho integrálního vzorečku. Buď $\varrho \in (0,R)$, $w \in B_\varrho(a)$.
Pak pro $z \in \partial B_\varrho(a)$: $\frac{|w-a|}{|z-a|} < 1$ a tedy:

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a-(w-a)} = \frac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{w-a}{z-a}\right)}_{=:q}} \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-a} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^m$$

Dle Věty 5.7 (Cauchyův vzorec)

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(a)} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(a)} \frac{f(z)}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^m}{(z-a)^m}\, dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\, dz\, (w-a)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (w-a)^m.$$

záměna $\int$ a $\sum$ dle Weierstrassovy věty a stejnoměrné konvergence

2. tvrzení Věty 15.7.

Definice **Laurentova řada** v $a \in \mathbb{C}$ je řada $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-a)^n$, kde $\{c_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} \subset \mathbb{C}$. Tato řada konverguje právě když

- $S^+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje

a současně

- $S^-(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$ konverguje

Řada $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n}$ se nazývá $\boxed{\text{regulární}}$ část Laurentovy řady (neboť je-li $f \in H(B_R(a))$ tak je její Laurentova řada je právě tato řada dle Věty 15.8)

Řada $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n (z-a)^n}$ se nazývá $\boxed{\text{hlavní část}}$ Laurentovy řady (určuje charakter funkce v okolí bodu a, kterou tato řada popisuje)

Protože $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \xi^n$

(1) $k := -n$
(2) $n := k$

$\xi := \frac{1}{z-a}$

tak z teorie mocninných řad najdeme:

- z regulární části: $R \in \langle 0, +\infty)$ tak, že $\sum_{n=0} c_n (z-a)^n < \infty$ v $B_R(a)$
- z hlavní části: $\rho \in \langle 0, +\infty)$ tak, že $\sum c_{-n} \xi^n < \infty$ v $B_{\rho^{-1}}(0)$

tzn. pokud $\frac{1}{|z-a|} < \rho^{-1} \Leftrightarrow |z-a| > \rho$

tedy $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n (z-a)^n$ konverguje vně $\overline{B_\rho(a)}$

$\| \; \mathbb{C} \setminus \overline{B_\rho(a)}$

Tak jsme dokázali následující tvrzení:

$\boxed{\text{Věta 15.9}}$ Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ existují $\rho, R \in \langle 0, +\infty)$ tak, že

- regulární část $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $B_R(a)$
- hlavní část $\sum_{n=-\infty} c_n (z-a)^n$ —||— a —||— v $\mathbb{C} \setminus \overline{B_\rho(a)}$

Je-li $\rho < R$, pak Laurentova řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $U_{\rho,R}(a) := \{z \in \mathbb{C};\ \rho < |z-a| < R\}$ a její součet $S(z) := S^+(z) + S^-(z)$ je holomorfní v $U_{\rho,R}(a)$

MEZIKRUŽÍ

Příklady 1) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$ je ve tvaru Laurent. řady v $a \in \mathbb{C}$

a $f \in H(\mathbb{C} - \{a\})$ $\quad R = +\infty$, $\varrho = 0$

2) Pro $a = 0$, $e^z + e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$ pro $0 < |z| < +\infty$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$\rightarrow R = +\infty$

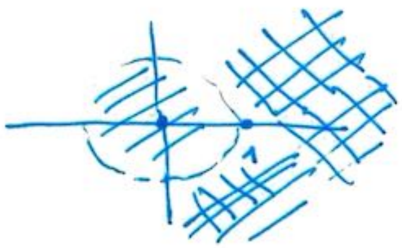
$\rightarrow \varrho = 0$

3) Rozviňte $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ do Laur. řady kolem $a = 0$ a $a = 2$

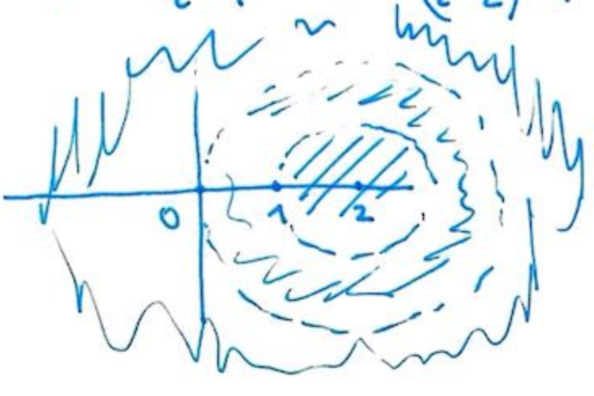
Řešení

▸ $f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = \begin{cases} |z|<1 & -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\left(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots\right) \\ |z|>1 & -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \end{cases}$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots$$



▸ $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-2)+1} - \frac{1}{(z-2)+2}$



$\boxed{(1)}$ $|z-2| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n$

$\boxed{(2)}$ $|z-2| > 1 \Rightarrow \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{(z-2)\left[1 + \frac{1}{z-2}\right]} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^n} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}$$

$\boxed{(3)}$ $|z-2| > 2 \Rightarrow -\frac{1}{(z-2)+2} = -\frac{1}{z-2}\,\frac{1}{1+\frac{2}{z-2}} = -\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{(z-2)^{n+1}}$

$\boxed{(4)}$ $|z-2| < 2 \Rightarrow -\frac{1}{(z-2)+2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}$

Tedy Laurentovy řady v $U_{0,1}(2)$: součet (1) a (4)

v $U_{1,2}(2)$: součet (2) a (4)

v $U_{2,+\infty}(2)$: součet (2) a (3)

$\boxed{\text{Věta 15.10}}$ Buď $0 \le \rho < R \le +\infty$ a $f \in H(U_{\rho,R}(a))$.
Pak existují jednoznačně určené $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ tak, že

$$(\bullet) \quad \boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{v } U_{\rho,R}(a)}$$

přičemž

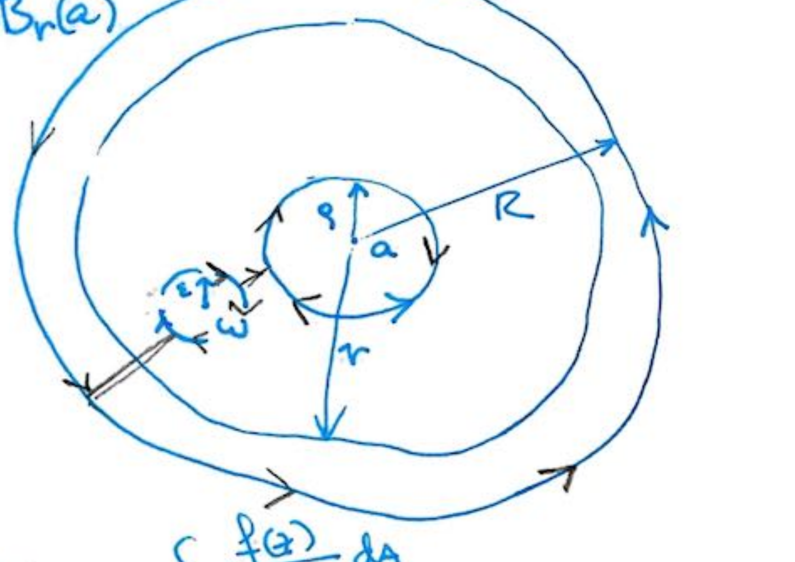
$$(\bullet\bullet) \quad \boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dA} \quad \text{kde } r \in (\rho, R).$$

(Dk) Pro $w \in U_{\rho,r}(a)$ a $z \in \partial B_r(a)$

máme: • $f \in H(U_{\rho,R}(a))$

• $\frac{f(z)}{z-w} \in H\left(U_{\rho,R}(a) \setminus B_\varepsilon(w)\right)$

Tedy dle Cauchyho věty pro $\rho < \rho' < r < R' < R$



$$0 = \int_{\partial U_{\rho',R'}(a) \setminus \partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} =$$

$$= \underbrace{\int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)}{z-w} dA}_{I} - \underbrace{\int_{\partial B_{\rho'}(a)} \frac{f(z)}{z-w} dA}_{J} - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dA}_{= f(w)\, 2\pi i}$$

a podobně jako ve větě 15.8:

$$I = \int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)\, dA}{z-a-(w-a)} = \int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{1}{z-a} \frac{f(z)}{1-\frac{w-a}{z-a}} dA = \int_{\partial B_{R'}(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} dA$$

$$\int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dA\, (w-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dA\, (w-a)^n$$

opět Cauchy

$$J = \int_{\partial B_{\rho'}(a)} \frac{f(z)}{z-a-(w-a)} dA = -\int_{\partial B_{\rho'}(a)} \frac{1}{w-a} \frac{f(z)}{1-\frac{z-a}{w-a}} dA = -\int_{\partial B_{\rho'}(a)} \sum_{n=0}^{\infty} f(z) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dA$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_{\rho'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n}} dA\, (w-a)^{-(n+1)} \qquad -(n+1) \to k$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{k=-1} \int_{\partial B_{\rho'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dA\, (w-a)^k = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)\, dA}{(z-a)^{n+1}} (w-a)^n,$$

což dává výsledek.

Vztah mezi Laurentovými a Fourierovými řadami

▶ Buď $f \in H(\mathcal{U}_{1-\varepsilon,1+\varepsilon}(0))$ pro $\varepsilon \in (0,1)$.

Pak $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ přičemž $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$

Věta 15.10

$$\underset{\substack{z=e^{it}\\ dz = ie^{it}dt}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\, e^{-int}\, dt$$

což vidí celkové dává Fourierovu řadu pro fci $\varphi(t) = f(e^{it})$:

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\, e^{-int}\right)} e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(f\circ e^{it}, \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\right) \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

▶ Naopak, každá Four. řada v proměnné x: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

lze přepsat do tvaru $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k$

což je Laurentova řada v bodě $a=0$.

Cvičení Napište Fourierovu řadu fce $\varphi(t) = \frac{a \sin t}{1 - 2a\cos t + a^2}$ $\quad |a|<1$

Návod: a) ověřte, že $\varphi(t) = f(e^{it})$ kde

$$f(z) = \frac{1-z^2}{2i\left[z^2 - (a+\frac{1}{a})z + 1\right]} \quad \text{pro } z \in \mathcal{U}_{1-\varepsilon,1+\varepsilon}(0)$$

b) spočtěte Laurentovu řadu $f(z)$. ▨

Definice (některých typů singularit) Řekneme, že f má v $a \in \mathbb{C}$

- isolovanou singularitu $\overset{df}{\equiv} \exists R>0$ tak, že $f \in H(\mathcal{U}_{0,R}(a))$ [$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in \mathcal{U}_{0,R}(a)$]
- odstranitelnou singularitu $\overset{df}{\equiv}$
  - f má v a isolovanou sing.
  - $c_{-m} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (jen regulární část)
- pól $\equiv$
  - f má v a isolovanou singularitu
  - $(\exists n_0 < 0)(c_{n_0} \neq 0)$ a $(\forall n < n_0)\ c_n = 0$.
- podstatnou singularitu $\equiv$
  - f má v a isolovanou singularitu
  - $(\forall n < 0)(\exists m < n)(c_m \neq 0)$

V následující části výkladu si ukážeme, že

$\boxed{V15.10}$ • f má v a **odstranitelnou singularitu** $\iff \lim_{z\to a} f(z)$ existuje vlastní $\in \mathbb{C}$

$\boxed{V15.11}+\boxed{V15.12}$ f má v a **pól** $\iff \lim_{z\to a} f(z) = \infty$

$\boxed{V15.12}$ • f má v a **podstatnou singularitu** $\iff \lim_{z\to a} f(z)$ neexistuje

Věta 15.10 (Riemannova věta) Předpokládejme, že f má v a izolovanou singularitu. Následující výroky jsou ekvivalentní

(1) f má v a odstranitelnou singularitu

(2) $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$ existuje

(3) f je omezená na jistém okolí $U_{0,R}(a)$

Dk: Protože f má v a izolovanou singularitu, tak $\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n.}$ (*)

$(1)\Rightarrow(2)$ Protože f má v a odstranitelnou singularitu, tak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ a tak $\lim_{z\to a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 \in \mathbb{C}$, což je (2)

$(2)\Rightarrow(3)$ Víme z 1. semestru

$(3)\Rightarrow(1)$ Protože f je v okolí a ve tvaru (*), ukážeme, že $c_{-m} = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Vskutku:

$$c_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{-m}}\, dz \underset{\substack{z = a+\rho e^{it} \\ t\in(0,2\pi)}}{=} \frac{1 i}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it})\, \rho^m e^{imt} e^{it}\, dt$$

a tedy

$$|c_{-m}| \le \frac{\overset{\text{f omezená}}{M}}{\cancel{2\pi}} \rho^m \cancel{2\pi} \longrightarrow 0 \text{ pro } \rho \to 0+.$$

▷ Póly vs kořeny

Def $a \in \mathbb{C}$ je kořen fce $h \in H(U_R(a))$ násobnosti $k \overset{\text{df.}}{\equiv} h(a) = h'(a) = \dots = h^{(k-1)}(a) = 0$ a $h^{(k)}(a) \neq 0$.

Tvrzení 1 Fce h má v a kořen násobnosti $k \iff \exists\, U(a)\ \exists\, \varphi \in H(U(a))$ a $\varphi(a) \neq 0$ a $h(z) = (z-a)^k \varphi(z)$

Dk

$\boxed{\Leftarrow}$ Postupným derivováním

$\boxed{\Rightarrow}$ Napiš si Taylorův rozvoj h v bodě a, a užij předpoklad:

$$h(z) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{f^{(l)}(a)}{l!} (z-a)^l = (z-a)^k \underbrace{\sum_{l=k}^{\infty} \frac{f^{(l)}(a)}{l!} (z-a)^{l-k}}_{\varphi(z)\ \&\ \varphi(a) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}}$$

$\boxed{\text{Tvrzení 2}}$ Nechť
- f má v a kořen násobnosti k
- g má v a kořen násobnosti l
- h má v a kořen násobnosti m

Potom
- $f+g$ má v a kořen násobnosti nejméně $\min\{k,l\}$ (volba $g=-f$ dává nulovou funkci)
- $\alpha\neq 0 \Rightarrow \alpha f g$ má v a kořen násobnosti $k+l$
- $k>l \Rightarrow \frac{f}{g}$ má v a kořen násobnosti $k-l$
- $h\circ f$ má v a kořen násobnosti km

Dk pomocí předpokladů a předchozího tvrzení. ▨

$\boxed{\text{Věta 15.11}}$ Má-li f v a izolovanou singularitu, pak jsou ekvivalentní:

(a) f má v a pól násobnosti k

(b) $f(z)=\dfrac{\tilde\varphi(z)}{(z-a)^k}$ kde $\tilde\varphi\in H(U(a))$ a $\tilde\varphi(a)\neq 0$

(c) $\dfrac{1}{f}$ má v a kořen násobnosti k

Dk $\boxed{(c)} \overset{\text{Tvrzení 1}}{\iff} \dfrac{1}{f(z)}=\varphi(z)(z-a)^k$ a $\underbrace{\varphi(a)\neq 0 \text{ a } \varphi\in H(U(a))}_{\Rightarrow\ \varphi(z)\neq 0 \text{ v } \tilde U(a)}$

Označ: $\tilde\varphi(z):=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ pro $z\in\tilde U(a)$

$[(b)]$ $\iff \boxed{f(z)=\dfrac{\tilde\varphi(z)}{(z-a)^k} \text{ kde } \tilde\varphi(a)\neq 0 \text{ a } \tilde\varphi\in H(\tilde U(a))}$

$$\iff f(z)=\frac{1}{(z-a)^k}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n-k}, \quad a_0\neq 0$$

$$= \sum_{m=-k}^{\infty} a_{m+k}(z-a)^m$$

$m=n-k$
$m: -k$ do ∞

Laurentova řada charakterizující pól násobnosti k.

tj. $\boxed{(a)}$

▨

$\boxed{\text{Věta 15.12}}$ Má-li f v a izolovanou singularitu, pak jsou ekvivalentní:

(1a) f má v a pól

(1b) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

Také jsou ekvivalentní:

(2a) f má v a podstatnou singularitu

(2b) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ neexistuje

(2c) $(\forall \varrho > 0)\ \left[f\left(U_{0,\varrho}(a)\right) \text{ je hustá v } \mathbb{C} \right]$

Dk $\boxed{(1a) \Rightarrow (1b)}$ Z (1a) dle V15.11 plyne $f(z) = \dfrac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k}$ kde $\tilde{\varphi}(a) \neq 0$ pro nějaké $k \geq 1$

odsud: $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k} = \infty$.

$\boxed{(1b) \Rightarrow (1a)}$ $\boxed{(1b)} \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} \dfrac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & z \neq a \text{ z blízko } a \\ 0 \end{cases}$ má v a kořen

$\overset{\text{Věta 15.11}}{\Rightarrow} \dfrac{1}{h(z)}$ má v a pól ale $\dfrac{1}{h(z)} = f(z)$.

$\boxed{(2a) \Rightarrow (2c)}$, což je ekvivalentní implikaci $\boxed{\neg(2c) \Rightarrow \neg(2a)}$, kterou dokážeme

$\boxed{\neg(2c)} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}$ a $U_r(\alpha) \subset \mathbb{C}$ tak, že $U_r(\alpha) \cap f\left(U_{0,\varrho}(a)\right) = \emptyset \ \forall \varrho$

$\Leftrightarrow \forall z \in U_{0,\varrho}(a) \ |f(z) - \alpha| > r$.

Definujme $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - \alpha}$. Pak $|g(z)| < \dfrac{1}{r}$ a dle Věty 15.10 lze g dodefinovat limitou tak, že $g \in H\left(B_\varrho(a)\right)$. Mohou nastat dvě možnosti:

(i) $\boxed{g(a) \neq 0} \Rightarrow g(z) \neq 0$ v okolí $a \Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + \alpha$

$\Rightarrow f$ má v a odstranitelnou singularitu

(ii) $\boxed{g(a) = 0} \Rightarrow g$ má v a kořen nějaké násobnosti

$\Rightarrow \dfrac{1}{g}$ má v a pól —‖—

$\Rightarrow f$ má v a pól —‖— .

$\boxed{(2c) \Rightarrow (2b)}$ $(2c) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C} \ \exists z_n \in U_{0,\varrho}(a)$ tak, že $f(z_n) \to \alpha$

$\Rightarrow f$ nemá v a limitu.

$\boxed{(2b) \Rightarrow (2a)} \Leftrightarrow \boxed{\neg(2a) \Rightarrow \neg(2b)}$ toto ale je již dokázáno. $\blacksquare$

Příklady ① $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ má v 0 odstranitelnou singularitu

② $f(z) = \dfrac{1}{z}$ má v 0 pól násobnosti 1

③ Funkce $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$, $\sin\frac{1}{z}$, $\cos\frac{1}{z}$ mají v 0 podstatnou singularitu, což lze nahlédnout z rozvoje do Laurent. řad, ale také tak, že $\frac{1}{z} : U_{0,\rho}(0) \to \mathbb{C} \setminus \overline{U_{\frac{1}{\rho}}(0)}$

a "exp" zobrazuje libovolný pás šířky 2π na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

a tedy $\exp\frac{1}{z} : U_{0,\rho}(0) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{C}\setminus\{0\}$, což je silnější jev než (2c) a platí obecně:

Věta (Piccardova) Bod a je podstatná singularita f $\iff$ $f(U_{0,\rho}(a)) = \mathbb{C}\setminus\{\text{jeden bod}\}$

Bez důkazu.

$\vdash$

15.5. Reziduová věta

Motivační úvaha pro definici rezidua: Je-li a izolovaná singularita fce f, pak $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ v $U_{0,R}(a)$. Pro $r \in (0,R)$ pak platí:

$$\int_{\partial B_r(a)} f(z)\,dz = \int_{\partial B_r(a)} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n\,dz$$

$f \in H(U_{0,\rho}(a))$ a tedy stejnoměrně konvergentní v okolí $\partial B_r(a)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\partial B_r(a)} (z-a)^n\,dz \quad \begin{matrix} z = a + re^{it} \\ = \\ dz = ire^{it} \end{matrix}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} i r^{n+1} e^{(n+1)it}\,dt$$

$$= \underline{c_{-1}\, 2\pi i}$$

Definice c_{-1} se nazývá residuum fce f v bodě a a značí se $\boxed{\operatorname{res}_a f}$