Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Body	6	6	6	6	24
Získáno					

[6] 1. Nechť $\Phi : C^1([a,b]) \to \mathbb{R}$.

1. Zadefinujte diferenciál Gateaux $\delta\Phi[y_0]$, kde $y_0 \in C^1([a,b])$.
2. Zadefinujte Frechetův diferenciál $d\Phi(y_0)$ respektive $\Phi'(y_0) \in C^1([a,b])$.
3. Ukažte, že z existence Frechetova diferenciálu plyne existence diferenciálu Gateaux.
4. Buď $f \in C([a,b])$. Určete $\delta\Phi[y_0]$ a $d\Phi(y_0)$ pro $\Phi[y_0] := \int_a^b \frac{(y_0'(x))^2}{2} - f(x)y_0(x)\,dx$. Odůvodněte.

[6] 2.

1. Zformulujte Leviho větu.
2. Rozhodněte a odůvodněte, zda platí tvrzení: Jsou-li $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelné a nezáporné, pak

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

3. Zformulujte Lebesgueovu větu.
4. Rozhodněte a odůvodněte, zda platí:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Dokažte Lebesgueovu větu.

[6] 3.

1. Zadefinujte křivkový integrál druhého druhu $\int_{\langle\phi\rangle} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds}$ včetně přesných předpokladů na uvažovanou křivku $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}^d$.
2. Čemu se rovná $\int_{\langle\phi\rangle} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds}$ víte-li, že $\mathbf{f} = \nabla U$, kde $U \in C^1(\mathbb{R}^d)$? Dokažte.
3. Nechť $\mathbf{f} = \nabla U$. Za jakých dalších předpokladů na křivku ϕ je $\int_{\langle\phi\rangle} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds} = 0$?
4. Je-li $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha s hranicí ∂S popsanou (uzavřenou) křivkou $\langle\phi\rangle$. Pak platí

$$\int_{\langle\phi\rangle} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds} = \int_{\partial S} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds} = \int_S \ldots$$

Doplňte vzorec a zadefinujte diferenciální operátor, který se ve vzorci vyskytuje.

[6] 4. Uvažujte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*-periodickou, spojitou funkci, která je po částech* C^1.

1. Uvedené vlastnosti funkce f zadefinujte.
2. Zadefinujte n-tý částečný součet s_n^f Fourierovy řady funkce f.
3. Zformulujte tvrzení týkající se
   - konvergence s_n^f k f v $L^2((-\pi, \pi))$,
   - bodové konveregnce s_n^f k f,
   - stejnoměrné konveregence s_n^f k f na relevantních intervalech.
4. Dokažte (resp. popište hlavní body důkazu) tvrzení týkající se bodové a stejnoměrné konvergence s_n^f k f.